UNIVERSIDAD EUROPEA DE MADRID

ESCUELA DE ARQUITECTURA, INGENIERÍA Y DISEÑO

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Estudio del oscilador armónico dependiente del tiempo: análisis clásico y cuántico

Pablo García Sabariego
Dirigido por
Dr. Daniel Gómez Vergel

CURSO 2022-2023

TÍTULO: ESTUDIO DEL OSCILADOR ARMÓNICO DEPENDIENTE DEL TIEMPO: ANÁLISIS CLÁSICO Y CUÁNTICO

AUTOR: PABLO GARCÍA SABARIEGO

TITULACIÓN: GRADO EN FÍSICA

DIRECTOR DEL PROYECTO: Dr. DANIEL GÓMEZ VERGEL

FECHA: 26 DE MAYO DE 2023

RESUMEN

Se ha realizado un estudio teórico del oscilador armónico unidimensional con dependencia temporal, un sistema físico-matemático fundamental a la hora de describir gran cantidad de procesos y modelos que aparecen dentro de numerosos campos de la física. Se han obtenido soluciones a la ecuación del oscilador armónico clásico, mediante el uso de funciones solución de la ecuación diferencial de Ermakov-Pinney. También se ha alcanzado una expresión cerrada del operador unitario de evolución, que representa la evolución temporal de este sistema en mecánica cuántica, usando una gran variedad de herramientas y resultados matemáticos. Si bien estos resultados son ampliamente conocidos en la bibliografía, este trabajo se centra en los cálculos y métodos detrás de su obtención, haciendo de este proyecto un interesante ejercicio de investigación y desarrollo matemático. Por último, se ha mostrado la aplicabilidad de este estudio a la hora de estudiar el comportamiento de cualquier función de onda bajo la acción de un potencial oscilador armónico de frecuencia dependiente del tiempo arbitraria.

Palabras clave: Oscilador armónico, dinámica unitaria, ecuación Ermakov-Pinney, imagen de Schrödinger, imagen de Heisenberg.

ABSTRACT

A theoretical study of the one-dimensional, time-dependent harmonic oscillator has been carried out. It is a fundamental physical and mathematical system which describes numerous processes and models that appear in many fields of physics. Solutions to the classical harmonic oscillator equation have been obtained, making use of the differential equation of Ermakov-Pinney. Moreover, a closed expression of the unitary evolution operator, which represents the time evolution of a system in quantum mechanics, has been reached, using a great variety of mathematical tools and results. Even though these results are well known in bibliography, this study centers around the calculations and methods behind their obtainment, which makes this project an interesting exercise of investigation and mathematical development. Lastly, the applicability of this study for analysing the behaviour of any initial wave function under the action of a harmonic oscillator potential of arbitrary time-dependent frequency has been shown in examples.

Keywords: Harmonic oscillator, unitary dynamics, Ermakov-Pinney equation, Schrödinger picture, Heisenberg picture.

AGRADECIMIENTOS

A Daniel, que ha sido un gran tutor y profesor, del que he aprendido mucho, y cuyo trabajo de investigación me motiva enormemente a seguir estudiando física. A todos mis amigos que gastaron parte de su preciado tiempo en echarme una mano, sois seres de luz. A la información libre, y a toda la gente que la hace accesible. Sin ella, este proyecto no hubiera sido posible.

DEDICATORIA

A mi familia y amigos. A Clara, por estar siempre ahí, apoyándome incluso en los peores momentos. No podría haber llegado hasta aquí sin vosotros. Espero que, aunque probablemente no entendáis nada de este trabajo, por lo menos os sintáis orgullosos de lo que representa para mi.

TABLA RESUMEN

	DATOS
Nombre y apellidos:	Pablo García Sabariego
Título del proyecto:	Estudio del oscilador armónico dependiente del tiempo: análisis clásico y cuántico
Director del proyecto:	Dr. Daniel Gómez Vergel
El proyecto se ha realizado en colaboración de una empresa o a petición de una empresa:	NO
El proyecto ha implementado un producto:	NO
El proyecto ha consistido en el desarrollo de una investigación o innovación:	SI
Objetivo general del proyecto:	Obtener soluciones del sistema oscilador armónico dependiente del tiempo, clásica y cuánticamente

Tabla 1: Tabla resumen del proyecto

Índice de figuras

Índice de tablas

Índice

1. Introducción

1.1. Contexto, justificación y estado del arte

El oscilador armónico es uno de los modelos más importantes y más estudiados dentro de la física. Describe oscilaciones periódicas de un grado de libertad alrededor de un punto de equilibrio, lo cual establece un marco matématico fundamental para describir una gran variedad de fenómenos físicos. Una de sus principales cualidades, y que le da tanto interés, es la capacidad de aproximar de forma muy simple cualquier función potencial que presente un mínimo local, suponiendo pequeños desplazamientos alrededor de ese punto (Figura 1) [1] .

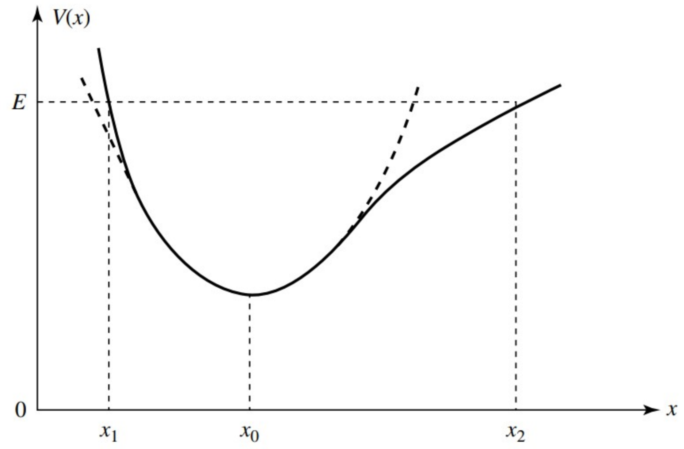

Figura 1: Cualquier potencial V(x) puede ser aproximado alrededor de sus mínimos por un potencial cuadrático (línea de puntos).

El equivalente de este modelo dentro de la mecánica cuántica y su solución exacta es una de las lecciones introductorias estudiadas en cualquier curso elemental sobre este campo de la física.

Este sistema ha sido ampliamente estudiado durante toda la historia de la física, más recientemente su forma mecano-cuántica. Algunos ejemplos comunes de osciladores armónicos serían: péndulos y muelles, los sistemas clásicos más básicos; átomos e iones situados en una red cristalina (formando un sólido), los cuales vibran formando fonones; el campo electromagnético, que es equivalente a un sistema de osciladores armónicos independientes, lo cual lleva a su cuantización; sistemas de partículas idénticas, cuyas transiciones de fase vienen dadas en saltos discretos de energía del oscilador armónico cuántico, etc. [1, 2, 3, 4, 5]

En este estudio se emplean numerosas técnicas matemáticas avanzadas y conceptos físicos que se han estudiado a lo largo de toda la carrera, y muestra conceptos que aparecen en muchas de las asignaturas del grado, lo que lo convierte en un estudio especialmente interesante como proyecto final.

1.2. Planteamiento y objetivos

Este trabajo constituye una revisión bibliográfica acerca de la resolución de un caso particular del oscilador armónico, en el cual sus parámetros dependen del tiempo. Este es conocido como *oscilador armónico dependiente del tiempo*, o *TDHO (Time-Dependent Harmonic Oscillator)* de forma abreviada. Sus propiedades son de grán interes y la base de modelos como la teoría cuántica de campos, en el cual es totalmente fundamental. Este sistema, en su versión clasica, trae consigo una ecuación del movimiento que no es trivialmente resoluble, y cuya solución se tratará con detalle en este trabajo.

Dentro del estudio mecano-cuántico, se buscará obtener una expresión cerrada del operador unitario de evolución y sus elementos de matriz. Con esto, podemos determinar el estado del sistema (que contiene toda la información que se puede conocer sobre él) en todo momento, para cualquier frecuencia dependiente del tiempo, con tan solo fijar el estado inicial. Se verán ejemplos al final del trabajo.

1.3. Resultados obtenidos

Se han obtenido soluciones del *TDHO* dentro del estudio clásico, que han sido luego utilizadas en la obtención del operador unitario de evolución, en el estudio mecano-cuántico. Estas expresiones han sido empleadas en mostrar cómo estudiar aplicaciones específicas del oscilador armónico, para cualquier frecuencia dependiente del tiempo, y para un estado inicial arbitrario del sistema.

1.4. Estructura de la memoria

El desarrollo de este trabajo se divide en tres secciones principales. La primera es el estudio clásico del *TDHO* (sección 3), donde se obtienen soluciones de su ecuación del movimiento, en función de soluciones de la ecuación Ermakov-Pinney. La segunda parte y más larga es el estudio del oscilador armónico en mecánica cuántica (sección 4), en el que se obtendrá el operador unitario de evolución de este sistema. Por último, un apartado de conclusiones (sección 5), que engloba la discusión de los resultados, ejemplos de aplicaciones de este estudio, y algunos comentarios acerca del trabajo.

2. Objetivos

2.1. Objetivos generales y específicos

La primera parte consistirá en el estudio clásico del oscilador armónico dependiente del tiempo, o *TDHO*. Como ya se ha mencionado, el sistema está definido por una ecuación diferencial de segundo orden, homogénea, cuya resolución es no trivial. Sin embargo, esta goza de un estudio extenso y que ha sido completado de forma rigurosa por numerosos autores en el último siglo. En particular, el uso de la ecuación auxiliar de Ermakov-Pinney tiene especial relevancia, y sus soluciones se utilizarán profusamente a lo largo de todo el trabajo [6, 7, 8].

De la misma forma, se realizará un estudio mecano-cuántico del oscilador armónico dependiente del tiempo, o *TDQHO (Time-Dependent Quantum Harmonic Oscillator)* para abreviar. El objetivo principal será hallar una expresión cerrada del operador de evolución del sistema, el cual muestra como evoluciona con el tiempo a través de la ecuación de Schrödinger. Este estudio ya ha sido realizado por numerosos autores, entre los cuales se destacan algunos que han sido particularmente útiles en la investigación de este trabajo [9, 10, 11, 12, 13]. En particular, el artículo de Moya-Cessa y Guasti [10] muestra un desarrollo que se seguirá muy de cerca en la sección del estudio cuántico, como se verá más adelante. También cabría mencionar el artículo de Eduardo J. S. Villaseñor y Daniel Gómez Vergel [14], el cual presenta resultados principales que se obtendrán en este trabajo, y contiene una extensa bibliografía acerca de esta materia.

En el transcurso de este análisis se utilizará el invariante de Ermakov-Lewis [15, 16, 17]. Este ha sido estudiado profundamente para distintas aplicaciones ([18] y sus referencias recopilan extensamente su historia). Además, en el proceso, se hace un breve inciso en el estudio de este sistema dentro de la imagen de Heisenberg, donde se sacan los operadores posición y momento dependientes del tiempo, y se comprueba como las ecuaciones clásicas del movimiento se cumplen también dentro de este marco [19, 20].

Por último, se estudiará el caso concreto de un oscilador armónico con frecuencia e^t, a partir de los resultados obtenidos en los apartados previos, para así comprobar su utilidad a la hora de estudiar modelos que presentan este sistema.

2.2. Beneficios del proyecto

El oscilador armónico dependiente del tiempo es un sistema físico que constituye el pilar fundamental de muchos modelos de distintos campos de la física. En particular, es de gran relevancia en Teoría Cuantica de Campos y en Gravedad Cuántica. Confío en que este estudio, un exhaustivo ejercicio de aplicación de técnicas matemáticas y físicas para el estudio de un sistema cuántico tan importante, sea de importante en los años venideros, en los que tomaré estudios de postgrado y optaré por una carrera de investigador en este área de física fundamental.

2.3. Planificación y recursos

Tal y como se mostró en el anteproyecto, la siguiente tabla muestra la planificación de horas del trabajo, dividida en las tres partes principales del trabajo, que se han explicado anteriormente en la subsección de estructura de la memoria.

Partes del proyecto	**Días**	**Horas**	**Fechas**
Parte 1: Estudio clásico	14	37	16/01 - 30/01
Parte 2: Estudio cuántico	77	197	31/01 - 18/04
Parte 3: Conclusiones	23	66	19/04 - 12/05

Tabla 2: Tabla de planificación del proyecto

Este horario se ha seguido rigurosamente, y no han habido problemas de tiempo. Las reuniones con el tutor han sido frecuentes, prácticamente una vez por semana, y en ellas se ha ido informando del progreso y resolviendo dudas.

Para varios cálculos de este trabajo, se ha utilizado el software *Mathematica*, cuya licencia ha sido proporcionada por la universidad. Esta memoria ha sido escrita en LaTeX.

3. El oscilador armónico clásico dependiente del tiempo

3.1. Planteamiento

El oscilador armónico se puede plantear sencillamente como un movimiento unidimensional sometido a la acción de un potencial. Considérese, por tanto, una masa puntual m bajo la acción del potencial cuadrático unidimensional $V(x) = kx^2/2$ (Figura 2 [1]), donde k sería la constante elástica del muelle, y $x(t)$ la posición, que depende del tiempo.

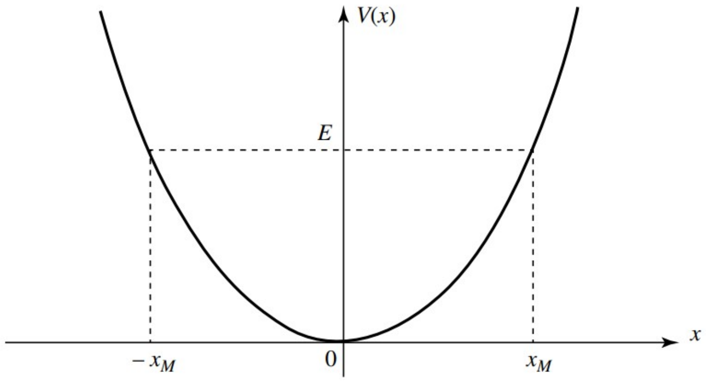

Figura 2: El potencial de energía V(x) del oscilador armónico simple unidimensional. La masa oscila con una amplitud x_M y energía total E.

Este potencial implica una fuerza F cuya expresión es:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx \tag{3.1.1}$$

A partir de la segunda ley de Newton, $F = m\,a$:

$$-kx = m\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad\Longrightarrow\quad m\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + kx = 0 \tag{3.1.2}$$

Reordenando términos quedaría la conocida ecuación clásica del movimiento del oscilador armónico independiente del tiempo,

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0\ , \tag{3.1.3}$$

donde $\Omega^2 = k \cdot m^{-1}$ y $\ddot{x}$ indica derivada segunda con respecto del tiempo de x.

En particular, buscaremos soluciones de esta ecuación para funciones $\Omega(t)$ que dependan del tiempo. Renombrando la posición $x(t)$ como $u(t)$, que será la función con la que se trabajará a lo largo de la próxima sección, la ecuación (3.1.3) toma entonces la forma general:

$$\ddot{u}(t) + \Omega^2(t)u(t) = 0 \tag{3.1.4}$$

que es la ecuación del *TDHO*. Esta expresión corresponde a una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Su resolución no es inmediata, y se requieren ciertos resultados que se van a introducir previo a su estudio.

3.2. La ecuación Ermakov-Pinney

V. Ermakov [6] introdujo e investigó una ecuación diferencial no lineal muy semejante a la del *TDHO* (3.1.4):

$$\ddot{\rho}(t) + \Omega^2(t)\rho(t) = \frac{1}{\rho^3(t)} \tag{3.2.1}$$

La solución hallada por E. Pinney en 1950 [7] es:

$$\rho(t) = \sqrt{Au_1^2 + Bu_2^2 + 2Cu_1u_2} \tag{3.2.2}$$

donde $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son soluciones linealmente independientes del *TDHO* (3.1.4), y las constantes A, B y C están relacionadas mediante $C^2 - AB = 1/W^2$ siendo W el wronskiano de $u_1(t)$ y $u_2(t)$. Este wronskiano es claramente no nulo, lo que implica que $(C^2 - AB)^{-1} > 0$. Se puede comprobar entonces que la función $\rho^2(t)$ es una forma cuadrática definida positiva, y $\rho(t) > 0$ para cualquier instante de tiempo t. Esta propiedad será clave más adelante.

Proposición 3.1. *Dada una función $\rho(t)$ solución de la ecuación Ermakov-Pinney* (3.2.1)*, la solución general de la ecuación del TDHO* (3.1.4) *adopta la forma:*

$$u(t) = A\rho(t)\,\mathrm{sen}\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) + B\rho(t)\cos\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \tag{3.2.3}$$

Demostración. Se derivará $u(t)$ con respecto del tiempo dos veces, para después sustituir en (3.1.4). La primera derivada es:

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) = A\dot{\rho}(t)\,\mathrm{sen}\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) + A\rho(t)\cos\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\frac{1}{\rho^2(t)}\\ + B\dot{\rho}(t)\cos\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - B\rho(t)\,\mathrm{sen}\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\frac{1}{\rho^2(t)}\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Aquí se ha aplicado el teorema fundamental del cálculo, que establece que la derivada de la integral es la propia función: siendo $F(t) = \int^t f(t)dt$, entonces $dF/dt = f(t)$, siempre que F(t) y f(t) sean funciones bien definidas en intervalos cerrados, como es el caso de $\rho(t)$, definida en cualquier intervalo cerrado por encima de 0, sin incluirlo.

Agrupando términos queda:

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) = A\dot{\rho}(t)\,\mathrm{sen}\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) + A\frac{1}{\rho(t)}\cos\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\\ + B\dot{\rho}(t)\cos\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - B\frac{1}{\rho(t)}\,\mathrm{sen}\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

De la misma forma, derivamos esta expresión para obtener $\ddot{u}(t)$:

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t) &= A\ddot{\rho}(t)\,\mathrm{sen}\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) + A\dot{\rho}(t)\cos\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\frac{1}{\rho^2(t)} \\ &+ A\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho(t)}\right)\cos\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - A\frac{1}{\rho(t)}\,\mathrm{sen}\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\frac{1}{\rho^2(t)} \\ &+ B\ddot{\rho}(t)\cos\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - B\dot{\rho}(t)\,\mathrm{sen}\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\frac{1}{\rho^2(t)} \\ &- B\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho(t)}\right)\mathrm{sen}\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - B\frac{1}{\rho(t)}\cos\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\frac{1}{\rho^2(t)}\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Como $d(\rho^{-1}(t))/dt = -\dot{\rho}(t)/\rho^2(t)$, algunos términos se cancelan, quedando:

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t) &= A\ddot{\rho}(t)\,\mathrm{sen}\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - A\frac{1}{\rho^3(t)}\,\mathrm{sen}\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \\ &+ B\ddot{\rho}(t)\cos\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - B\frac{1}{\rho^3(t)}\cos\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \\ &= A\,\mathrm{sen}\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\left(\ddot{\rho}(t) - \frac{1}{\rho^3(t)}\right) \\ &+ B\cos\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\left(\ddot{\rho}(t) - \frac{1}{\rho^3(t)}\right)\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Ahora, $\rho(t)$ es solución de la ecuación E-P (3.2.1), por tanto se tiene la igualdad:

$$\ddot{\rho}(t) - \frac{1}{\rho^3(t)} = -\Omega^2(t)\rho(t) \tag{3.2.8}$$

Entonces sustituyendo en (3.2.7) y reordenando términos:

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t) &= \left[A\,\mathrm{sen}\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) + B\cos\left(\int^t \frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\right](-\Omega^2(t)\rho(t)) \\ &= u(t)\cdot(-\Omega^2(t))\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Obtenida la expresión de $\ddot{u}(t)$, se puede ver simplemente volviendo a la ecuación del oscilador armónico (3.1.4) y sustituyendo que queda:

$$u(t)\cdot(-\Omega^2(t)) + \Omega^2(t)u(t) = 0 \tag{3.2.10}$$

y por lo tanto $u(t)$ es una solución de esta ecuación como se quería demostrar. □

3.3. Solución en función de valores iniciales

Nos interesa encontrar el valor de las constantes A y B que aparecen en la solución general (3.2.3) que se acaba de comprobar. Para ello, se necesita establecer unas condiciones iniciales que las definan idénticamente. Para un instante inicial t_0, podemos nombrar estos valores como:

$$\begin{cases} u(t_0) \equiv u_0 \\ \dot{u}(t_0) \equiv \dot{u}_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho(t_0) \equiv \rho_0 \\ \dot{\rho}(t_0) \equiv \dot{\rho}_0 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Las expresiones de $u(t)$ (3.2.3) y $\dot{u}(t)$ (3.2.5) para el instante inicial t_0 toman la forma

$$u_0 = A\rho_0 \text{ sen}\left(\int^{t_0} \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) + B\rho_0 \cos\left(\int^{t_0} \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 = A\dot{\rho}_0 \text{ sen}\left(\int^{t_0} \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) + \frac{A}{\rho_0} \cos\left(\int^{t_0} \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \\ + B\dot{\rho}_0 \cos\left(\int^{t_0} \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - \frac{B}{\rho_0} \text{ sen}\left(\int^{t_0} \frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

y forman un sistema de ecuaciones para A y B. Nótese que el límite de integración cambia, ya que evaluamos la integral en función del instante inicial t_0. Aparte, como esta no va a cambiar en ningún momento a lo largo de los cálculos, podemos considerarla una constante, y renombrarla como α para ahorrar escritura innecesaria.

$$\alpha \equiv \int^{t_0} \frac{ds}{\rho^2(s)} \tag{3.3.4}$$

Resolvamos el sistema por el método de sustitución. Despejando A de la primera ecuación de (3.3.3):

$$A = \frac{u_0 - B\rho_0 \cos\alpha}{\rho_0 \text{ sen } \alpha} \tag{3.3.5}$$

Sustituyendo A en la segunda ecuación de (3.3.3):

$$\dot{u}_0 = \frac{u_0 - B\rho_0 \cos\alpha}{\rho_0 \text{sen}\,\alpha}\left(\dot{\rho}_0 \text{ sen } \alpha + \frac{1}{\rho_0}\cos\alpha\right) + B\left(\dot{\rho}_0 \cos\alpha - \frac{1}{\rho_0} \text{ sen } \alpha\right) \tag{3.3.6}$$

$$= \frac{u_0}{\rho_0 \text{ sen } \alpha}\left(\dot{\rho}_0 \text{ sen } \alpha + \frac{\cos\alpha}{\rho_0}\right) + B\left(\dot{\rho}_0 \cos\alpha - \frac{\text{sen }\alpha}{\rho_0} - \dot{\rho}_0 \cos\alpha - \frac{\cos^2\alpha}{\rho_0 \text{ sen } \alpha}\right) \tag{3.3.7}$$

Despejando B:

$$B = \frac{\ddot{u}_0 - \dfrac{\dot{u}_0}{\rho_0 \text{ sen } \alpha}\left(\dot{\rho}_0 \text{ sen } \alpha + \dfrac{1}{\rho_0}\cos\alpha\right)}{-\left(\dfrac{1}{\rho_0} \text{ sen } \alpha + \dfrac{\cos^2\alpha}{\rho_0 \text{ sen } \alpha}\right)} \tag{3.3.8}$$

Multiplicando por $\rho_0 \text{sen} / \rho_0 \text{sen}$:

$$B = \frac{u_0\left(\dot{\rho}_0 \text{sen}\,\alpha + \dfrac{1}{\rho_0}\cos\alpha\right) - \dot{u}_0\,\rho_0 \text{ sen } \alpha}{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha} \tag{3.3.9}$$

$$= u_0\left(\dot{\rho}_0 \text{ sen } \alpha + \frac{1}{\rho_0}\cos\alpha\right) - \dot{u}_0\,\rho_0 \text{ sen } \alpha \tag{3.3.10}$$

Una vez obtenida esta expresión de B, podemos volver a la primera ecuación del sistema

(3.3.3) y hallar la expresión de A.

$$u_0 = A\rho_0 \text{ sen } \alpha + \left[\left(\dot{\rho}_0 \text{ sen } \alpha + \frac{1}{\rho_0}\cos\alpha\right) u_0 - \rho_0 \text{ sen } \alpha\, \dot{u}_0\right]\rho_0 \cos\alpha \tag{3.3.11}$$

$$A = \frac{1}{\rho_0 \text{ sen } \alpha}\left[u_0 - \rho_0\cos\alpha\left(\dot{\rho}_0 \text{ sen} + \frac{1}{\rho_0}\cos\alpha\right) u_0 + \rho_0^2 \text{ sen } \alpha\, \dot{u}_0 \cos\alpha\right] \tag{3.3.12}$$

$$= \frac{u_0}{\rho_0 \text{ sen } \alpha}\left(1 - \rho_0\dot{\rho}_0\cos\alpha \text{ sen } \alpha - \cos^2\alpha\right) + \rho_0\cos\alpha\,\dot{u}_0 \tag{3.3.13}$$

$$= \frac{u_0}{\rho_0 \text{ sen } \alpha}\left(\text{sen}^2\ \alpha - \rho_0\dot{\rho}_0\cos\alpha \text{ sen } \alpha\right) + \rho_0\cos\alpha\,\dot{u}_0 \tag{3.3.14}$$

$$= \left(\frac{1}{\rho_0} \text{ sen } \alpha - \dot{\rho}_0\cos\alpha\right) u_0 + \rho_0\cos\alpha\,\dot{u}_0 \tag{3.3.15}$$

Ahora que conocemos A y B, podemos reexpresar $u(t)$ sustituyendo en (3.2.3). Sea:

$$\beta \equiv \int^t \frac{ds}{\rho^2(s)} \tag{3.3.16}$$

Entonces:

$$u(t) = \left[\left(\frac{1}{\rho_0}\text{sen}\,\alpha - \dot{\rho}_0\cos\alpha\right) u_0 + \rho_0\cos\alpha\,\dot{u}_0\right]\rho(t)\text{sen}\,\beta \tag{3.3.17}$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{\rho_0}\cos\alpha + \dot{\rho}_0\text{sen}\,\alpha\right) u_0 - \rho_0 \text{ sen}\,\alpha\dot{u}_0\right]\rho(t)\cos\beta$$

$$= \left[\frac{\text{sen}\,\alpha\text{sen}\,\beta}{\rho_0} - \dot{\rho}_0\cos\alpha\text{sen}\,\beta + \dot{\rho}_0\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\rho_0}\right]\rho(t)u_0 \tag{3.3.18}$$

$$+ \left[\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta\dot{\rho}_0 - \text{sen}\,\alpha\cos\beta\rho_0\right]\rho(t)\dot{u}_0$$

Teniendo en cuenta las identidades trigonometricas siguentes:

$$\begin{cases} \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha\cos\beta - \cos\alpha \text{ sen } \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta + \cos\alpha\cos\beta \end{cases} \tag{3.3.19}$$

y observando que:

$$\alpha - \beta = \int^{t_0} \frac{ds}{\rho^2(s)} - \int^{t} \frac{ds}{\rho^2(s)} = \int_t^{t_0} \frac{ds}{\rho^2(s)} = -\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{\rho^2(s)} \tag{3.3.20}$$

la función $u(t)$ se puede simplificar aún más. Volviendo a (3.3.18), queda:

$$u(t) = \left[\frac{1}{\rho_0}\cos\left(\int_t^{t_0}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) + \dot{\rho}_0\,\text{sen}\left(\int_t^{t_0}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\right]u_0\rho(t) \tag{3.3.21}$$

$$- \rho_0\,\text{sen}\left(\int_t^{t_0}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\dot{u}_0\rho(t)$$

$$= \left[\frac{1}{\rho_0}\cos\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) + \dot{\rho}_0\,\text{sen}\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\right]u_0\rho(t) \tag{3.3.22}$$

$$- \rho_0\,\text{sen}\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\dot{u}_0\rho(t)$$

que por la paridad de la función seno y coseno, es decir, que

$$\begin{cases} \cos(x) = \cos(-x) \\ \text{sen}(x) = -\,\text{sen}(-x) \end{cases} \tag{3.3.23}$$

se convierte finalmente en:

$$\begin{aligned} u(t) = &\left[\frac{1}{\rho_0}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - \dot{\rho}_0 \operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\right] u_0\rho(t) \\ &+ \dot{u}_0\rho_0\rho(t)\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Esta solución del oscilador armónico clásico dependiente del tiempo está definida de forma única para las condiciones iniciales u_0 y $\dot{u}_0$, y por tanto, todo lo que multiplica a estos dos valores es una expresión invariante, independiente de la función $\rho(t)$. Además, estos coeficientes cumplen lo siguiente:

Proposición 3.2. *Sean los coeficientes:*

$$c(t,t_0) = \frac{\rho(t)}{\rho_0}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - \dot{\rho}_0\rho(t)\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \quad y \tag{3.3.25}$$

$$s(t,t_0) = \rho_0\rho(t)\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \tag{3.3.26}$$

Entonces estas dos expresiones son soluciones de la ecuación del TDHO, $\ddot{u}(t)+\Omega^2(t)u(t) = 0$.

Demostración. Tomemos primero $s(t,t_0)$, que es la expresión más corta, y derivémosla dos veces. Recuérdese que, por el teorema fundamental del cálculo, la derivada de la integral es la propia función evaluada en el límite superior de la integral, que en nuestro caso es t. Procedamos entonces con los cálculos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(s(t,t_0)) = \rho_0\dot{\rho}(t)\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) + \rho_0\frac{1}{\rho(t)}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \tag{3.3.27}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(s(t,t_0)) = &\rho_0\ddot{\rho}(t)\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) + \frac{\rho_0\dot{\rho}(t)}{\rho^2(t)}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \\ &- \rho_0\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho^2(t)}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - \frac{\rho_0}{\rho^3(t)}\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

El segundo y tercer término se cancelan, quedando

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(s(t,t_0)) = \rho_0\ddot{\rho}(t)\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - \frac{\rho_0}{\rho^3(t)}\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \tag{3.3.29}$$

$$= \rho_0\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\left(\ddot{\rho}(t) - \frac{1}{\rho^3(t)}\right) \tag{3.3.30}$$

que, al ser $\rho(t)$ solución de la ecuación E-P (3.2.1), se simplifica usando la igualdad (3.2.8):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(s(t,t_0)) = \rho_0\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)(-\Omega^2(t)\rho(t)) \tag{3.3.31}$$

Por tanto, sustituyendo en la ecuación del TDHO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(s(t,t_0)) + \Omega^2(t)s(t,t_0) = &\rho_0\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)(-\Omega^2(t)\rho(t)) \\ &+ \Omega^2(t)\rho_0\rho(t)\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.3.32}$$

tal y como queríamos comprobar. Vamos ahora con la segunda expresión, $c(t, t_0)$. De nuevo, derivamos dos veces con respecto del tiempo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(c(t,t_0)) = & \frac{\dot\rho(t)}{\rho_0}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - \frac{1}{\rho(t)\rho_0}\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \\ & - \dot\rho_0\dot\rho(t)\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - \frac{\dot\rho_0}{\rho(t)}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(c(t,t_0)) = & \frac{\ddot\rho(t)}{\rho_0}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - \frac{\dot\rho(t)}{\rho^2(t)\rho_0}\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \\ & + \frac{\dot\rho(t)}{\rho^2(t)\rho_0}\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - \frac{1}{\rho^3(t)\rho_0}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \\ & - \dot\rho_0\ddot\rho(t)\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - \frac{\dot\rho_0\dot\rho(t)}{\rho^2(t)}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) \\ & + \frac{\dot\rho_0\dot\rho(t)}{\rho^2(t)}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) + \frac{\dot\rho_0}{\rho^3(t)}\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\end{aligned} \tag{3.3.34}$$

Simplificando y agrupando términos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(c(t,t_0)) = & \frac{1}{\rho_0}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\left(\ddot\rho(t) - \frac{1}{\rho^3(t)}\right) \\ & - \dot\rho_0\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\left(\ddot\rho(t) + \frac{1}{\rho^3(t)}\right)\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

que, de nuevo, al ser $\rho(t)$ solución de la ecuación E-P, se cumple la igualdad (3.2.8), quedando:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(c(t,t_0)) &= (-\Omega^2(t)\rho(t))\left(\frac{1}{\rho_0}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - \dot\rho_0\operatorname{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\right) && (3.3.36)\\ &= -\Omega^2(t)c(t,t_0) && (3.3.37)\end{aligned}$$

y volviendo a la ecuación del TDHO, tendríamos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(c(t,t_0)) + \Omega^2(t)c(t,t_0) = -\Omega^2(t)c(t,t_0) + \Omega^2(t)c(t,t_0) = 0 \tag{3.3.38}$$

quedando así demostrado. □

Estas propiedades aparecerán más adelante cuando se trate con el operador unitario de evolución, dentro del marco mecano-cuántico de nuestro sistema, el cual se comenzará a examinar en la siguiente sección.

4. El oscilador armónico cuántico dependiente del tiempo

4.1. Planteamiento

Visto el resultado clásico de las funciones que solucionan la ecuación del oscilador armónico dependiente del tiempo, en esta sección del trabajo se estudiará su equivalencia dentro de la mecánica cuántica.

Se va a trabajar dentro del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, que está formado por funciones integrables cuadrado y definido por el producto interno:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \bar{\phi}\, \psi \tag{4.1.1}$$

siendo ϕ y ψ dos funciones de onda cualesquiera de nuestro sistema.

El hamiltoniano clásico del oscilador armónico toma la forma:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\, \Omega^2 x^2 \tag{4.1.2}$$

Sin embargo, se va a trabajar con una expresión equivalente, que sería:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{p}}^2 + \Omega^2(t)\, \hat{\mathrm{q}}^2\right) \tag{4.1.3}$$

donde $\hat{\mathrm{p}}$ y $\hat{\mathrm{q}}$ representan los operadores hermíticos de momento y posición, respectivamente. Este hamiltoniano se puede obtener tras una serie de transformaciones, tal y como se muestra en el anexo del artículo de Moya-Cessa y Guasti [10]. Además, en las siguientes subsecciones del trabajo, se va a seguir de forma muy cercana el planteamiento de este mismo artículo.

4.2. Transformaciones unitarias

Se van a definir una serie de operadores unitarios dependientes de las coordenadas $\hat{\mathrm{q}}$ y $\hat{\mathrm{p}}$. Estos operadores serán útiles más adelante para transformar el estado del sistema a otro equivalente, con el cual la resolución de la ecuación de Schrödinger se simplifica enormemente. Por el momento, se definirá cada uno y su acción sobre $\hat{\mathrm{q}}$ y $\hat{\mathrm{p}}$.

Proposición 4.1. *Sea el operador unitario* $\hat{D}_\rho(f)$*:*

$$\hat{D}_\rho(f) := \exp\left(-\frac{i}{2\hbar} f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right) \tag{4.2.1}$$

siendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función real arbitraria dependiente del tiempo. Se comprueba entonces que:*

1) $\hat{D}_\rho(f)\hat{\mathrm{q}}\hat{D}_\rho^\dagger(f) = \hat{\mathrm{q}}$

2) $\hat{D}_\rho(f)\hat{\mathrm{p}}\hat{D}_\rho^\dagger(f) = \hat{\mathrm{p}} + f(t)\hat{\mathrm{q}}$

Demostración. **1)** Desarrollando directamente:

$$\hat{D}_\rho(f)\hat{\mathrm{q}}\hat{D}_\rho^\dagger(f) = \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)\hat{\mathrm{q}}\exp\left(\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right) \tag{4.2.2}$$

Queremos comprobar si $\hat{\mathrm{q}}$ y $\hat{D}_\rho$ conmutan, es decir, que su conmutador $\left[\hat{\mathrm{q}}, \hat{D}_\rho\right]$ sea igual a 0, y así poderlos cambiar de orden y cancelar $\hat{D}_\rho$ con $\hat{D}_\rho^\dagger$ (al ser $\hat{D}_\rho$ un operador unitario, se cumple que $\hat{D}_\rho\hat{D}_\rho^\dagger = \mathbb{1}$). Desarrollando la exponencial en serie de potencias, se tiene lo siguiente:

$$\left[\hat{\mathrm{q}},\ \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)\right] = \left[\hat{\mathrm{q}}, \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)^i}{i!}\right] = \frac{1}{i!}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\hat{\mathrm{q}},\ \left(-\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)^i\right] \tag{4.2.3}$$

Se puede observar que bastaría con comprobar si el operador $\hat{\mathrm{q}}$ conmuta con el argumento de la exponencial (y por consecuencia cualquier potencia de este) para que también conmute con la exponencial. Rápidamente se ve que:

$$\left[\hat{\mathrm{q}},\ \left(-\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)\right] = \left(-\frac{i}{2\hbar}f(t)\right)\left[\hat{\mathrm{q}}, \hat{\mathrm{q}}^2\right] = 0, \tag{4.2.4}$$

y por tanto $\left[\hat{\mathrm{q}}, \hat{D}_\rho\right] = 0$. Por lo tanto, se pueden cambiar los términos de orden, tal que:

$$\hat{D}_\rho\hat{\mathrm{q}}\hat{D}_\rho^\dagger = \hat{\mathrm{q}}\hat{D}_\rho\hat{D}_\rho^\dagger = \hat{\mathrm{q}} \tag{4.2.5}$$

2) Con el operador momento $\hat{\mathrm{p}}$ no tenemos la misma suerte, ya que no conmuta con el argumento de la exponencial de $\hat{D}_\rho$. Podemos reescribir la acción de $\hat{D}_\rho$ sobre $\hat{\mathrm{p}}$ como:

$$\hat{D}_\rho\hat{\mathrm{p}}\hat{D}_\rho^\dagger = \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)\hat{\mathrm{p}}\exp\left(\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right) \tag{4.2.6}$$

$$= \hat{\mathrm{p}} + \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)\left[\hat{\mathrm{p}}, \exp\left(\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)\right] \tag{4.2.7}$$

Vamos a introducir y demostrar una simple propiedad que va a ser de utilidad aquí. En general, para dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$, se cumple lo siguiente:

$$\left[\hat{A}, \exp(\hat{B})\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\exp(\hat{B}),\ \text{cuando}\ \left[\hat{B}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0 \tag{4.2.8}$$

Demostración. Desarrollando en forma de sumatorio tenemos:

$$\left[\hat{A}, \exp(\hat{B})\right] = \left[\hat{A}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\hat{B}^n\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \left[\hat{A}, \frac{1}{2!}\hat{B}^2\right] + \left[\hat{A}, \frac{1}{3!}\hat{B}^3\right] + \cdots \tag{4.2.9}$$

$$= \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left(\hat{B}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}\right) \tag{4.2.10}$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\hat{B}^2\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}^2\right]\hat{B}\right) + \cdots$$

Supongamos que se cumple que $[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$, por hipótesis. Entonces se tiene que $\hat{B}[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}$. Sustituyendo en la expresión anterior queda:

$$\left[\hat{A}, \exp(\hat{B})\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2!}2\hat{B}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{3!}\left(\hat{B}^2\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + 2\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}^2\right) + \cdots \tag{4.2.11}$$

$$= \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2!}2\hat{B}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{3!}3\hat{B}^2\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \cdots \tag{4.2.12}$$

Es fácil comprobar por inducción que el término n-ésimo será:

$$\frac{1}{(n+1)!}(n+1)\hat{B}^n\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\frac{1}{n!}\hat{B}^n\left[\hat{A},\hat{B}\right] \tag{4.2.13}$$

y por tanto, se tiene el sumatorio:

$$\left[\hat{A},\exp(\hat{B})\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\hat{B}^n\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\exp(\hat{B})\left[\hat{A},\hat{B}\right] \tag{4.2.14}$$

quedando así comprobada. □

Vamos a intentar aplicar esta propiedad en (4.2.7). Comprobemos primero que $[\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]$ sea igual a 0, con $\hat{A}=\hat{\mathrm{p}}$ y $\hat{B}=\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2$, en nuestro caso.

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\left[\hat{\mathrm{p}},\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right]=\frac{i}{2\hbar}f(t)\left[\hat{\mathrm{p}},\hat{\mathrm{q}}^2\right] \tag{4.2.15}$$

El conmutador de $\hat{\mathrm{p}}$ y $\hat{\mathrm{q}}^2$ es:

$$\left[\hat{\mathrm{p}},\hat{\mathrm{q}}^2\right]=\hat{\mathrm{q}}\left[\hat{\mathrm{p}},\hat{\mathrm{q}}\right]+\left[\hat{\mathrm{p}},\hat{\mathrm{q}}\right]\hat{\mathrm{q}}=-2i\hbar\,\hat{\mathrm{q}}, \tag{4.2.16}$$

donde se ha aplicado la relación canónica de conmutación $[\hat{\mathrm{p}},\hat{\mathrm{q}}]=-i\hbar$. Volviendo al conmutador $[\hat{A},\hat{B}]$,

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\frac{i}{2\hbar}f(t)\,(-2i\hbar)\hat{\mathrm{q}}=f(t)\hat{\mathrm{q}} \tag{4.2.17}$$

Por tanto $\left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]$ se convierte en:

$$\left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]=\left[\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2,f(t)\hat{\mathrm{q}}\right]=\frac{i}{2\hbar}f^2(t)\left[\hat{\mathrm{q}}^2,\hat{\mathrm{q}}\right]=0 \tag{4.2.18}$$

La condición se cumple, así que podemos aplicar la propiedad (4.2.8) en (4.2.7), resultando:

$$\begin{aligned}
\hat{D}_\rho\hat{\mathrm{p}}\hat{D}_\rho^\dagger &= \hat{\mathrm{p}}+\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)\left[\hat{\mathrm{p}},\exp\left(\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)\right] && (4.2.19)\\
&= \hat{\mathrm{p}}+\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)\left[\hat{\mathrm{p}},\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right]\exp\left(\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right) && (4.2.20)\\
&= \hat{\mathrm{p}}+\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)f(t)\hat{\mathrm{q}}\exp\left(\frac{i}{2\hbar}f(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right) && (4.2.21)\\
&= \hat{\mathrm{p}}+f(t)\hat{\mathrm{q}} && (4.2.22)
\end{aligned}$$

que es finalmente lo que pretendíamos comprobar. □

Tomemos específicamente la función $f(t)=\dot{\rho}(t)/\rho(t)$, siendo $\rho(t)$ solución de la ecuación Ermakov-Pinney (3.2.1). Obsérvese como, al ser $\rho(t)$ estrictamente mayor que 0, esta función está bien definida y no va a presentar problemas de ceros en el denominador. El operador $\hat{D}_\rho(\mathrm{f})$ se convierte en:

$$\hat{D}_\rho=\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}^2\right) \tag{4.2.23}$$

Y aplicando el resultado (4.2.22), se tiene que la acción de $\hat{D}_\rho$ sobre $\hat{\text{p}}$ es:

$$\hat{D}_\rho \hat{\text{p}} \hat{D}_\rho^\dagger = \hat{\text{p}} + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\text{q}} \tag{4.2.24}$$

El operador $\hat{D}_\rho$, que aparece explícitamente en [10], es el primero de los operadores de transformación que nos interesan. Obsérvese como la acción de $\hat{D}_\rho$ sobre $\hat{\text{p}}$ representa una especie de *desplazamiento* del momento $\hat{\text{p}}$ proporcional a la posición $\hat{\text{q}}$, mientras que la posición $\hat{\text{q}}$ se ve inalterada por este operador. En la bibliografía se le suele llamar *"Displacement operator"* [21].

Proposición 4.2. *Sea el operador unitario $\hat{S}_\rho(g)$:*

$$\hat{S}_\rho(g) := \exp\left(\frac{i}{2\hbar} g(t)(\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}})\right) \tag{4.2.25}$$

siendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real arbitraria dependiente del tiempo. Se comprueba entonces que:

1) $\hat{S}_\rho(g)\, \hat{\text{q}}\, \hat{S}_\rho^\dagger(g) = \hat{\text{q}} \exp(g(t))$

2) $\hat{S}_\rho(g)\, \hat{\text{p}}\, \hat{S}_\rho^\dagger(g) = \hat{\text{p}} \exp(-g(t))$

Demostración. **1)** Desarrollando directamente:

$$\hat{S}_\rho(g)\, \hat{\text{q}}\, \hat{S}_\rho^\dagger(g) = \exp\left(\frac{i}{2\hbar} g(t)(\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}})\right) \hat{\text{q}} \exp\left(-\frac{i}{2\hbar} g(t)(\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}})\right) \tag{4.2.26}$$

Se va a aplicar el lemma Baker-Hausdorff, cuya expresión es la siguiente [4]:

$$\begin{aligned} \exp(i\hat{G}\lambda)\hat{A}\exp(-i\hat{G}\lambda) = \hat{A} + i\lambda[\hat{G},\hat{A}] + \left(\frac{i^2\lambda^2}{2!}\right)[\hat{G},[\hat{G},\hat{A}]] + \\ \cdots + \left(\frac{i^n\lambda^n}{n!}\right)[\hat{G},[\hat{G},[\hat{G},\ldots[\hat{G},\hat{A}]]]\ldots] + \ldots \end{aligned} \tag{4.2.27}$$

donde $\hat{A}$ y $\hat{G}$ son dos operadores cualesquiera, y λ un parámetro real. Identificando en nuestro caso que:

$$\hat{G} = (\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}})\,, \quad \hat{A} = \hat{\text{q}} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{1}{2\hbar} g(t)\,, \tag{4.2.28}$$

la expresión (4.2.27) se convierte en:

$$\hat{S}_\rho(g)\, \hat{\text{q}}\, \hat{S}_\rho^\dagger(g) = \hat{\text{q}} + \frac{i}{2\hbar} g(t)[\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}}, \hat{\text{q}}] + \frac{1}{2!}\left(\frac{i}{2\hbar} g(t)\right)^2 [\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}}, [\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}}, \hat{\text{q}}]] \ldots \tag{4.2.29}$$

El conmutador de $\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}}$ y $\hat{\text{q}}$ es:

$$[\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}}, \hat{\text{q}}] = [\hat{\text{q}}\hat{\text{p}}, \hat{\text{q}}] + [\hat{\text{p}}\hat{\text{q}}, \hat{\text{q}}] = \hat{\text{q}}[\hat{\text{p}}, \hat{\text{q}}] + [\hat{\text{p}}, \hat{\text{q}}]\hat{\text{q}} = -2i\hbar\, \hat{\text{q}} \tag{4.2.30}$$

El siguiente conmutador, $[\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}}, [\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}}, \hat{\text{q}}]]$, recupera el resultado del anterior, y sustituyendo sería:

$$[\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}}, [\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}}, \hat{\text{q}}]] = [\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}},\ -2i\hbar\, \hat{\text{q}}] = -2i\hbar[\hat{\text{q}}\hat{\text{p}} + \hat{\text{p}}\hat{\text{q}}, \hat{\text{q}}] = (-2i\hbar)^2\hat{\text{q}} \tag{4.2.31}$$

Es fácil comprobar por inducción que, en el sumando n-ésimo de (4.2.29), el conmutador tendría el valor:

$$[\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}, [\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}, \dots [\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}, \hat{q}]] \dots] = (-2i\hbar)^n \hat{q} \tag{4.2.32}$$

Por lo tanto, el sumando n-ésimo de (4.2.29) será:

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2\hbar}g(t)\right)^n (-2i\hbar)^n \hat{q} = \frac{(g(t))^n}{n!}\hat{q} \tag{4.2.33}$$

Con estos resultados, podemos reescribir (4.2.29) como:

$$\hat{S}_\rho(g)\,\hat{q}\,\hat{S}_\rho^\dagger(g) = \hat{q}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(g(t))^n}{n!} = \hat{q}\exp(g(t)) \tag{4.2.34}$$

quedando así la primera igualdad demostrada.

2) De la misma forma que antes, vamos a aplicar la fórmula Baker-Hausdorff (4.2.27), ahora para la acción sobre $\hat{p}$. Identificando

$$\hat{G} = (\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})\,, \quad \hat{A} = \hat{p} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{1}{2\hbar}g(t) \tag{4.2.35}$$

tendríamos que:

$$\hat{S}_\rho(g)\,\hat{p}\,\hat{S}_\rho^\dagger(g) = \hat{p} + \frac{i}{2\hbar}g(t)[\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}, \hat{p}] + \frac{1}{2!}\left(\frac{i}{2\hbar}g(t)\right)^2[\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}, [\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}, \hat{p}]] + \dots \tag{4.2.36}$$

El conmutador de $\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}$ y $\hat{p}$ es:

$$[\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}, \hat{p}] = [\hat{q}\hat{p}, \hat{p}] + [\hat{p}\hat{q}, \hat{p}] = [\hat{q}, \hat{p}]\hat{p} + \hat{p}[\hat{q}, \hat{p}] = 2i\hbar\,\hat{p} \tag{4.2.37}$$

y por tanto:

$$[\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}, [\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}, \hat{p}]] = [\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q},\, 2i\hbar\,\hat{p}] = 2i\hbar[\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}, \hat{q}] = (2i\hbar)^2\hat{p} \tag{4.2.38}$$

Por inducción, se puede comprobar que el conmutador del n-ésimo término sería:

$$[\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}, [\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}, \dots [\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}, \hat{p}]] \dots] = (2i\hbar)^n \hat{p} \tag{4.2.39}$$

con lo que el término n-ésimo de (4.2.36) es:

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2\hbar}g(t)\right)^n (2i\hbar)^n \hat{p} = \frac{(-1)^n(g(t))^n}{n!}\hat{p} \tag{4.2.40}$$

y entonces finalmente tendríamos que (4.2.36) se convierte en

$$\hat{S}_\rho(g)\,\hat{p}\,\hat{S}_\rho^\dagger(g) = \hat{q}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(g(t))^n}{n!} = \hat{p}\exp(-g(t)) \tag{4.2.41}$$

que es la expresión que queríamos comprobar. □

Tomando la función $g(t) = \log(\rho(t))$, con $\rho(t)$ solución de la ecuación E-P (3.2.1), el operador $\hat{S}_\rho(g)$ se convierte en:

$$\hat{S}_\rho = \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\log(\rho(t))(\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}} + \hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\right) \tag{4.2.42}$$

Conocida la acción de $\hat{S}_\rho(g)$ sobre $\hat{\mathrm{q}}$ (4.2.34) y $\hat{\mathrm{p}}$ (4.2.41), tendríamos:

$$\hat{S}_\rho\hat{\mathrm{q}}\hat{S}_\rho^\dagger = \hat{\mathrm{q}}\exp(\log\rho(t)) = \rho(t)\hat{\mathrm{q}} \tag{4.2.43}$$

$$\hat{S}_\rho\hat{\mathrm{p}}\hat{S}_\rho^\dagger = \hat{\mathrm{p}}\exp(-\log\rho(t)) = \frac{\hat{\mathrm{p}}}{\rho(t)} \tag{4.2.44}$$

Este operador $\hat{S}_\rho$, que aparece explícitamente en [10], es el segundo de los que nos interesan. De nuevo, que la función $\rho(t)$ sea solución de la ecuación Ermakov-Pinney asegura que siempre es mayor que 0, y por tanto no da problemas al evaluar el logaritmo, lo cual es increiblemente conveniente. Obsérvese como la acción del operador $\hat{S}_\rho$ se asemeja a un reescalado de $\hat{\mathrm{p}}$ y $\hat{\mathrm{q}}$, proporcional a $\rho(t)$, haciendo que la posición $\hat{\mathrm{q}}$ se alargue y el momento $\hat{\mathrm{p}}$ se acorte. Por este motivo, en la bibliografía se suele llamar a este operador *"Squeeze operator"* [21].

Proposición 4.3. *Sea el operador unitario $\hat{T}_\rho$, combinación de los dos operadores $\hat{D}_\rho$ y $\hat{S}_\rho$ que se acaban de definir:*

$$\hat{T}_\rho := \hat{S}_\rho\hat{D}_\rho = \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\log_{\mathrm{e}}\rho(t)(\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}} + \hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\right)\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho(t)}}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}^2\right) \tag{4.2.45}$$

Se comprueba que:

1) $\hat{T}_\rho\,\hat{\mathrm{q}}\,\hat{T}_\rho^\dagger = \rho(t)\hat{\mathrm{q}}$

2) $\hat{T}_\rho\,\hat{\mathrm{p}}\,\hat{T}_\rho^\dagger = \hat{\mathrm{p}}/\rho(t) + \dot{\rho}(t)\,\hat{\mathrm{q}}$

Demostración. **1)** Conociendo como actúan $\hat{D}_\rho$ (4.2.5) y $\hat{S}_\rho$ (4.2.34) sobre $\hat{\mathrm{q}}$, rápidamente se observa que:

$$\hat{T}_\rho\,\hat{\mathrm{q}}\,\hat{T}_\rho^\dagger = \hat{S}_\rho\hat{D}_\rho\,\hat{\mathrm{q}}\,\hat{D}_\rho^\dagger\hat{S}_\rho^\dagger = \hat{S}_\rho\,\hat{\mathrm{q}}\,\hat{S}_\rho^\dagger = \rho(t)\hat{\mathrm{q}} \tag{4.2.46}$$

2) Igualmente, sabiendo como actúan $\hat{D}_\rho$ (4.2.24) y $\hat{S}_\rho$ (4.2.41) sobre $\hat{\mathrm{p}}$,

$$\hat{T}_\rho\,\hat{\mathrm{p}}\,\hat{T}_\rho^\dagger = \hat{S}_\rho\hat{D}_\rho\,\hat{\mathrm{p}}\,\hat{D}_\rho^\dagger\hat{S}_\rho^\dagger = \hat{S}_\rho\left(\hat{\mathrm{p}} + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}\right)\hat{S}_\rho^\dagger \tag{4.2.47}$$

$$= \hat{S}_\rho\,\hat{\mathrm{p}}\,\hat{S}_\rho^\dagger + \hat{S}_\rho\,\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}\,\hat{S}_\rho^\dagger \tag{4.2.48}$$

$$= \frac{\hat{\mathrm{p}}}{\rho(t)} + \dot{\rho}(t)\,\hat{\mathrm{q}} \tag{4.2.49}$$

□

Un resultado que será de utilidad más adelante sería el siguiente. Consideremos la derivada parcial temporal de $\hat{T}_\rho^\dagger$:

$$\frac{\partial \hat{T}_\rho^\dagger}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{D}_\rho^\dagger \hat{S}_\rho^\dagger\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\exp\left(\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho(t)}}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}^2\right)\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\log_{\mathrm{e}}\rho(t)(\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}+\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\right)\right\} \tag{4.2.50}$$

$$= \hat{D}_\rho^\dagger \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho(t)}}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}^2\right)\hat{S}_\rho^\dagger + \hat{T}_\rho^\dagger \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{i}{2\hbar}\log_{\mathrm{e}}\rho(t)(\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}+\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\right) \tag{4.2.51}$$

$$= \hat{T}_\rho^\dagger \hat{S}_\rho \frac{i(\rho(t)\ddot{\rho}(t)-\dot{\rho}^2(t))}{2\hbar\rho^2(t)}\hat{\mathrm{q}}^2\hat{S}_\rho^\dagger + \hat{T}_\rho^\dagger\left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}(\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}+\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\right) \tag{4.2.52}$$

Nótese que se ha hecho el cambio $\hat{D}_\rho^\dagger = \hat{D}_\rho^\dagger \hat{S}_\rho^\dagger \hat{S}_\rho = \hat{T}_\rho^\dagger \hat{S}_\rho$. Desarrollando:

$$\frac{\partial \hat{T}_\rho^\dagger}{\partial t} = \hat{T}_\rho^\dagger\left[\frac{i(\rho(t)\ddot{\rho}(t)-\dot{\rho}^2(t))}{2\hbar\rho^2(t)}\hat{S}_\rho\hat{\mathrm{q}}^2\hat{S}_\rho^\dagger + \left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}(\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}+\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\right)\right] \tag{4.2.53}$$

Recordando la acción de $\hat{S}_\rho$ sobre $\hat{\mathrm{q}}$ (4.2.34), la acción de $\hat{S}_\rho$ sobre $\hat{\mathrm{q}}^2$ sería:

$$\hat{S}_\rho\hat{\mathrm{q}}^2\hat{S}_\rho^\dagger = \hat{S}_\rho\hat{\mathrm{q}}\hat{S}_\rho^\dagger\hat{S}_\rho\hat{\mathrm{q}}\hat{S}_\rho^\dagger = \rho^2(t)\hat{\mathrm{q}}^2 \tag{4.2.54}$$

En general, para dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ cualesquiera, la acción de un operador unitario sobre el producto de operadores es el producto la acción en cada operador por separado, es decir:

$$\hat{S}_\rho\hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{B}}\hat{S}_\rho^\dagger = \hat{S}_\rho\hat{\mathrm{A}}\hat{S}_\rho^\dagger\hat{S}_\rho\hat{\mathrm{B}}\hat{S}_\rho^\dagger \tag{4.2.55}$$

Volviendo a (4.2.53), finalmente queda:

$$\frac{\partial \hat{T}_\rho^\dagger}{\partial t} = \hat{T}_\rho^\dagger\frac{i}{2\hbar}\left[(\rho\ddot{\rho}-\dot{\rho}^2)\hat{\mathrm{q}}^2 - \frac{\dot{\rho}}{\rho}(\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}+\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\right] \tag{4.2.56}$$

El operador $\hat{T}_\rho$ va a ser de utilidad para transformar la ecuación de Schrödinger en una expresión equivalente, mucho más sencilla de resolver, como ya se ha mencionado. Antes de pasar a ello, es necesario introducir un importante operador adicional.

4.2.1. Invariante Ermakov-Lewis

Sea el operador $\hat{I}_\rho$:

$$\hat{I}_\rho := \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\hat{\mathrm{q}}}{\rho(t)}\right)^2 + (\rho(t)\hat{\mathrm{p}} - \dot{\rho}(t)\hat{\mathrm{q}})^2\right] \tag{4.2.57}$$

que es el conocido invariante de Ermakov-Lewis [15]. Esta expresión ha sido adoptada de [10]. Su interés dentro de nuestro estudio del oscilador armónico cuántico viene en que, como se va a demostrar a continuación, transformado bajo la acción de $\hat{T}_\rho$, se convierte en el hamiltoniano de un oscilador armónico independiente del tiempo y de frecuencia unidad. Por tanto, podremos trabajar con sus conocidos autoestados $|n\rangle$, que forman una base discreta del espacio de Hilbert $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$, y que cumplen $\mathbb{1} = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|$.

Proposición 4.4. *Dado el operador $\hat{I}_\rho$, se tiene que:*

1) $\hat{I}'_\rho = \hat{T}_\rho \hat{I}_\rho \hat{T}^\dagger_\rho = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{p}}^2 + \hat{\mathrm{q}}^2\right)$

2) $\frac{\partial \hat{I}'_\rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{I}'_\rho}{\mathrm{d}t} \neq 0$

Demostración. **1)** Calculando directamente:

$$\hat{I}'_\rho = \hat{T}_\rho \hat{I}_\rho \hat{T}^\dagger_\rho = \hat{T}_\rho \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\hat{\mathrm{q}}}{\rho}\right)^2 + (\rho\hat{\mathrm{p}} - \dot{\rho}\hat{\mathrm{q}})^2\right]\hat{T}^\dagger_\rho \tag{4.2.58}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{T}_\rho\left[\frac{\hat{\mathrm{q}}^2}{\rho^2} + \rho^2\hat{\mathrm{p}}^2 + \dot{\rho}^2\hat{\mathrm{q}}^2 - \rho\dot{\rho}\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}} - \rho\dot{\rho}\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}\right]\hat{T}^\dagger_\rho \tag{4.2.59}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{T}_\rho\frac{\hat{\mathrm{q}}^2}{\rho^2}\hat{T}^\dagger_\rho + \hat{T}_\rho\rho^2\hat{\mathrm{p}}^2\hat{T}^\dagger_\rho + \hat{T}_\rho\dot{\rho}^2\hat{\mathrm{q}}^2\hat{T}^\dagger_\rho - \hat{T}_\rho\rho\dot{\rho}\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}}\hat{T}^\dagger_\rho - \hat{T}_\rho\rho\dot{\rho}\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}\hat{T}^\dagger_\rho\right] \tag{4.2.60}$$

Teniendo en cuenta la acción de $\hat{T}_\rho$ sobre $\hat{\mathrm{q}}$ (4.2.46) y $\hat{\mathrm{p}}$ (4.2.49), y lo comentado acerca de la acción sobre el producto de operadores (4.2.55), tendríamos:

$$\hat{I}'_\rho = \frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2\hat{\mathrm{q}}^2}{\rho^2} + \rho^2\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}}{\rho} + \dot{\rho}\hat{\mathrm{q}}\right)^2 + \dot{\rho}^2\rho^2\hat{\mathrm{q}}^2 - \rho^2\dot{\rho}\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}}{\rho} + \dot{\rho}\hat{\mathrm{q}}\right)\hat{\mathrm{q}} - \rho^2\dot{\rho}\hat{\mathrm{q}}\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}}{\rho} + \dot{\rho}\hat{\mathrm{q}}\right)\right] \tag{4.2.61}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{\mathrm{q}}^2 + \rho^2\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{\rho^2} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}} + \hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}) + \dot{\rho}^2\hat{\mathrm{q}}^2\right) - \rho\dot{\rho}\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}} - \rho\dot{\rho}\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}} - \rho^2\dot{\rho}^2\hat{\mathrm{q}}^2\right] \tag{4.2.62}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{\mathrm{q}}^2 + \hat{\mathrm{p}}^2 + \rho\dot{\rho}(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}} + \hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}) + \rho^2\dot{\rho}^2\hat{\mathrm{q}}^2 - \rho\dot{\rho}(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}} + \hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}) - \rho^2\dot{\rho}^2\hat{\mathrm{q}}^2\right] \tag{4.2.63}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{q}}^2 + \hat{\mathrm{p}}^2\right) \tag{4.2.64}$$

donde se acaba de comprobar como $\hat{I}'_\rho$ es simplemente el hamiltoniano de un oscilador armónico independiente del tiempo y de frecuencia unidad. **2)** Una vez obtenido $\hat{I}'_\rho = \frac{1}{2}\left[\hat{\mathrm{q}}^2 + \hat{\mathrm{p}}^2\right]$, vamos a calcular su derivada parcial y su derivada total. Por un lado,

$$\frac{\partial \hat{I}'_\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{q}}^2 + \hat{\mathrm{p}}^2\right) = 0 \tag{4.2.65}$$

pues $\hat{\mathrm{q}}$ y $\hat{\mathrm{p}}$ son independientes del tiempo. Por otro lado, la derivada temporal total de un operador se expresa como

$$\frac{\mathrm{d}\hat{I}'_\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \hat{I}'_\rho}{\partial t} - \frac{i}{\hbar}\left[\hat{I}'_\rho, \hat{\mathcal{H}}(t)\right] \tag{4.2.66}$$

con $\hat{\mathcal{H}}$ el operador hamiltoniano (4.1.3), que en nuestro caso es explicitamente dependiente del tiempo. Se acaba de comprobar que el primer término de la derivada parcial es nulo. Vamos con el segundo.

$$-\frac{i}{\hbar}\left[\hat{I}'_\rho, \hat{\mathcal{H}}(t)\right] = -\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{q}}^2 + \hat{\mathrm{p}}^2\right), \frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{p}}^2 + \Omega^2(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)\right] \tag{4.2.67}$$

$$= \frac{i}{4\hbar}\left(\left[\hat{\mathrm{q}}^2, \hat{\mathrm{p}}^2\right] + \left[\hat{\mathrm{q}}^2, \Omega^2(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right] + \left[\hat{\mathrm{p}}^2, \hat{\mathrm{p}}^2\right] + \left[\hat{\mathrm{p}}^2, \Omega^2(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right]\right) \tag{4.2.68}$$

$$= \frac{i}{4\hbar}\left(2i\hbar(\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}} + \hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}}) - 2i\hbar\Omega^2(t)(\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}} + \hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\right) \neq 0 \tag{4.2.69}$$

que es claramente distinto de 0. Para los conmutadores de la segunda linea, se ha aplicado el resultado (4.2.16) y las relaciones de conmutadores pertinentes. □

Estos resultados son lógicos viendo lo ya mencionado de que este hamiltoniano corresponde a un sistema independiente del tiempo.

4.3. La ecuación de Schrödinger

La evolución temporal de un estado cuántico depende del hamiltoniano del sistema a través de la conocida ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = \hat{\mathcal{H}}(t)\Psi(t) \tag{4.3.1}$$

o también

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}(t)|\Psi(t)\rangle \tag{4.3.2}$$

en notación bra-ket de Dirac. Esta ecuación es la que proporcionará una primera expresión para un operador que representa la evolución de nuestro sistema. Interesaría por tanto obtener una expresión formal para el estado $|\Psi(t)\rangle$, solución de esta ecuación.

Para ello, se hará lo siguiente, siguiendo de forma cercana el artículo de Moya-Cessa [10]. Primero, transformaremos el estado $|\Psi(t)\rangle$ en otro equivalente, $|\varphi_\rho(t)\rangle$, mediante el operador $\hat{T}_\rho$. Entonces, veremos cual sería la nueva ecuación de Schrödinger para este estado $|\varphi_\rho(t)\rangle$. Por último, la resolveríamos, y desharíamos la transformación, multiplicando por $\hat{T}_\rho^\dagger$, para conseguir la expresión del estado $|\Psi(t)\rangle$.

El estado $|\varphi_\rho(t)\rangle$ se define de la siguiente forma:

Proposición 4.5. *Sea el estado $|\varphi_\rho(t)\rangle$ dado por la transformación*

$$|\varphi_\rho(t)\rangle = \hat{T}_\rho|\Psi(t)\rangle \tag{4.3.3}$$

Se cumple que:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_\rho(t)\rangle = \frac{\hat{\mathrm{p}}^2 + \hat{\mathrm{q}}^2}{2\rho^2}|\varphi_\rho(t)\rangle$$

Demostración. Dado (4.3.3), se tiene también la transformación:

$$\hat{T}_\rho^\dagger|\varphi_\rho(t)\rangle = \hat{T}_\rho^\dagger\hat{T}_\rho|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t)\rangle \tag{4.3.4}$$

Sustituyamos esto en la ecuación de Schrödinger (4.3.2):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\hat{T}_\rho^\dagger|\varphi_\rho(t)\rangle) = \hat{\mathcal{H}}(t)\hat{T}_\rho^\dagger|\varphi_\rho(t)\rangle \tag{4.3.5}$$

$$i\hbar\left[\frac{\partial\hat{T}_\rho^\dagger}{\partial t}|\varphi_\rho(t)\rangle + \hat{T}_\rho^\dagger\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_\rho(t)\rangle\right] = \hat{\mathcal{H}}(t)\hat{T}_\rho^\dagger|\varphi_\rho(t)\rangle \tag{4.3.6}$$

$$i\hbar\hat{T}_\rho^\dagger\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_\rho(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}(t)\hat{T}_\rho^\dagger|\varphi_\rho(t)\rangle - i\hbar\frac{\partial\hat{T}_\rho^\dagger}{\partial t}|\varphi_\rho(t)\rangle \tag{4.3.7}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_\rho(t)\rangle = \left(\hat{T}_\rho\hat{\mathcal{H}}(t)\hat{T}_\rho^\dagger - i\hbar\hat{T}_\rho\frac{\partial\hat{T}_\rho^\dagger}{\partial t}\right)|\varphi_\rho(t)\rangle \tag{4.3.8}$$

El término de la izquierda ya se encuentra en la forma que se quería. Bastaría con comprobar el término entre paréntesis. Primero, veamos la acción de $\hat{T}_\rho$ sobre el hamiltoniano. Se tiene que:

$$\hat{T}_\rho \hat{\mathcal{H}}(t)\hat{T}_\rho^\dagger = \hat{T}_\rho \frac{1}{2}(\hat{\mathrm{p}}^2 + \Omega^2(t)\hat{\mathrm{q}}^2)\hat{T}_\rho^\dagger \tag{4.3.9}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\hat{T}_\rho \hat{\mathrm{p}}^2 \hat{T}_\rho^\dagger + \hat{T}_\rho \Omega^2(t)\hat{\mathrm{q}}^2\hat{T}_\rho^\dagger\right) \tag{4.3.10}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}}{\rho} + \dot{\rho}\hat{\mathrm{q}}\right)^2 + \Omega^2(t)\rho^2\hat{\mathrm{q}}^2\right] \tag{4.3.11}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{\rho^2} + \dot{\rho}^2\hat{\mathrm{q}}^2 + \frac{\dot{\rho}}{\rho}(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}} + \hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}) + \Omega^2(t)\rho^2\hat{\mathrm{q}}^2\right] \tag{4.3.12}$$

Volviendo a (4.3.8) y sustituyendo(4.3.12) y (4.2.56) en el segundo término de la ecuación:

$$\hat{T}_\rho \hat{\mathcal{H}}(t)\hat{T}_\rho^\dagger - i\hbar \hat{T}_\rho \frac{\partial \hat{T}_\rho^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{\rho^2} + \dot{\rho}^2\hat{\mathrm{q}}^2 + \frac{\dot{\rho}}{\rho}(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}} + \hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}) + \Omega^2(t)\rho^2\hat{\mathrm{q}}^2\right] \tag{4.3.13}$$

$$- i\hbar \hat{T}_\rho \hat{T}_\rho^\dagger \frac{i}{2\hbar}\left[(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)\hat{\mathrm{q}}^2 - \frac{\dot{\rho}}{\rho}(\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}} + \hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\right] \tag{4.3.14}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{\rho^2} + \dot{\rho}^2\hat{\mathrm{q}}^2 + \Omega^2(t)\rho^2\hat{\mathrm{q}}^2\right) + \frac{1}{2}\left[(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)\hat{\mathrm{q}}^2\right] \tag{4.3.15}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{\rho^2} + \Omega^2(t)\rho^2\hat{\mathrm{q}}^2 + \rho\ddot{\rho}\hat{\mathrm{q}}^2\right) \tag{4.3.16}$$

Al ser $\rho(t)$ solución de la ecuación E-P (3.2.1), este resultado se simplifica:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{\rho^2} + \left(\Omega^2(t)\rho + \ddot{\rho}\right)\rho\hat{\mathrm{q}}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^3}\rho\hat{\mathrm{q}}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}^2 + \hat{\mathrm{q}}^2}{\rho^2}\right) \tag{4.3.17}$$

Sustituyendo en (4.3.8) se obtiene finalmente:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_\rho(t)\rangle = \frac{\hat{\mathrm{p}}^2 + \hat{\mathrm{q}}^2}{2\rho^2}|\varphi_\rho(t)\rangle \tag{4.3.18}$$

que es la expresión que queríamos demostrar. □

Nótese que, introduciendo el operador $\hat{I}'_\rho$ (4.2.64), la ecuación (4.3.18) se convertiría en:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_\rho(t)\rangle = \frac{\hat{I}'_\rho}{\rho^2}|\varphi_\rho(t)\rangle \tag{4.3.19}$$

Tal y como queríamos, la ecuación de Schrödinger para el estado $|\varphi_\rho(t)\rangle$ es muy sencilla de resolver, y se puede hacer de forma inmediata sin más que despejar e integrar:

$$|\varphi_\rho(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{I}'_\rho \int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)|\varphi_\rho(t_0)\rangle \tag{4.3.20}$$

Cabe remarcar que, al resolver la EDO, se introduce la condición inicial t_0, que aparece tanto en la integral como en estado inicial $|\varphi_\rho(t_0)\rangle$.

Si deshacemos la transformación (4.3.3) para volver al estado $\Psi(t)$, la expresión (4.3.20) se convierte en:

$$\hat{T}_\rho|\Psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{I}'_\rho\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\hat{T}_{\rho 0}|\Psi(t_0)\rangle \tag{4.3.21}$$

donde $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$. Multiplicando por $\hat{T}^\dagger_\rho$ por la izquierda, se obtiene la expresión:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{T}^\dagger_\rho \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{I}'_\rho\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\hat{T}_{\rho 0}|\Psi(t_0)\rangle \tag{4.3.22}$$

que es la solución general de la ecuación de Schrödinger (4.3.2) para el oscilador armónico dependiente del tiempo.

4.4. Operador unitario de evolución

Dos estados que están desplazados entre sí por una translación temporal $t_0 \to t$ se relacionan con el llamado operador de evolución temporal, $\hat{U}(t, t_0)$:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle \tag{4.4.1}$$

que por definición es unitario. Obsérvese que, en (4.3.22), el término que multiplica al estado inicial $|\Psi(t_0)\rangle$ es un operador que cumple con la forma de $\hat{U}(t, t_0)$ en la expresión anterior. Por tanto podemos definir nuestro operador de evolución temporal como:

$$\hat{U}(t, t_0) := \hat{T}^\dagger_\rho \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{I}'_\rho\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\hat{T}_{\rho 0} \tag{4.4.2}$$

Sin embargo, esta forma de expresarlo es difícil de interpretar. Conviene representar este operador en términos del espacio de posiciones, q̂, en el que es más sencillo trabajar con él. Gracias al invariante Lewis-Ermakov transformado $\hat{I}'_\rho$ que hemos introducido, esto será mucho más sencillo, como veremos más tarde. Pero antes, una breve inciso en el estudio del oscilador armónico desde la imagen de Heisenberg.

4.4.1. Imagen de Heisenberg

Hasta el momento se ha trabajado en la imagen de Schrödinger, en la que tenemos que un estado $|\alpha\rangle$ evoluciona como:

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{t} \hat{U}(t, t_0)|\alpha\rangle \tag{4.4.3}$$

Dada la unitariedad del operador de evolución $\hat{U}(t, t_0)$, se tiene que el producto interno de dos estados, $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$, se mantiene invariante:

$$\langle\beta|\alpha\rangle \xrightarrow{t} \langle\beta|\hat{U}^\dagger(t, t_0)\hat{U}(t, t_0)|\alpha\rangle \tag{4.4.4}$$

Si ahora tomamos el producto interno de un operador $\hat{X}$, tendríamos que, por la propiedad asociativa:

$$\langle\beta|\hat{X}|\alpha\rangle \xrightarrow{t} (\langle\beta|\hat{U}^\dagger(t, t_0))\hat{X}(\hat{U}(t, t_0)|\alpha\rangle) = \langle\beta|(\hat{U}^\dagger(t, t_0)\hat{X}\hat{U}(t, t_0))|\alpha\rangle \tag{4.4.5}$$

Es decir, podríamos considerar que es el operador $\hat{X}$ el que evoluciona en el tiempo, de la siguiente forma:

$$\hat{X} \xrightarrow{t} \hat{U}^{\dagger}(t,t_0)\hat{X}\hat{U}(t,t_0) \tag{4.4.6}$$

dejando los estados $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ constantes en el tiempo. Ambas interpretaciones,(4.4.3) y (4.4.6), son totalmente equivalentes. A esta última se la conoce como *imagen de Heisenberg* [4]. Es de gran interés en mecánica cuántica, ya que guarda una enorme conexión con la mecánica clásica, como se comprobará más adelante en esta subsección.

En este nuevo marco de estudio, como podemos comprobar en la relación anterior, son los observables del sistema los que varían en el tiempo en vez de los estados. En particular, las coordenadas canónicas $\hat{\mathrm{q}}$ y $\hat{\mathrm{p}}$ pasarían a depender del tiempo, y se reexpresan como:

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{q}}_H(t) &:= \hat{U}^{\dagger}(t,t_0)\,\hat{\mathrm{q}}\,\hat{U}(t,t_0)\\ \hat{\mathrm{p}}_H(t) &:= \hat{U}^{\dagger}(t,t_0)\,\hat{\mathrm{p}}\,\hat{U}(t,t_0)\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Proposición 4.6. *Los operadores $\hat{\mathrm{q}}_H(t)$ y $\hat{\mathrm{p}}_H(t)$ toman la forma:*

$$\textit{1)}\quad \hat{\mathrm{q}}_H(t) = \rho(t)\left(\frac{1}{\rho(t_0)}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) - \dot{\rho}(t_0)\,\mathrm{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\right)\hat{\mathrm{q}} \tag{4.4.8}$$
$$+\,\rho(t)\rho(t_0)\,\mathrm{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\hat{\mathrm{p}}$$

$$\textit{2)}\quad \hat{\mathrm{p}}_H(t) = -\frac{1}{\rho(t)}\left(\frac{1}{\rho(t_0)}\,\mathrm{sen}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right) + \dot{\rho}(t_0)\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\right)\hat{\mathrm{q}} \tag{4.4.9}$$
$$+\,\frac{\rho(t_0)}{\rho(t)}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}\right)\hat{\mathrm{p}} + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}_H(t)$$

y además se cumple que

$$\textit{3)}\quad \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{q}}_H}{\mathrm{d}t} = \hat{\mathrm{p}}_H \tag{4.4.10}$$

Demostración. Se va a trabajar con los operadores de creación y aniquilación, $\hat{a}^{\dagger}$ y $\hat{a}$, que se relacionan con $\hat{\mathrm{q}}$ y $\hat{\mathrm{p}}$ de la siguiente manera:

$$\hat{\mathrm{q}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\hat{a}^{\dagger}+\hat{a}) \quad \text{y} \quad \hat{\mathrm{p}} \equiv i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\hat{a}^{\dagger}-\hat{a}) \tag{4.4.11}$$

y también:

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{1}{2\hbar}}(\hat{\mathrm{q}}+i\hat{\mathrm{p}}) \quad \text{y} \quad \hat{a}^{\dagger} \equiv \sqrt{\frac{1}{2\hbar}}(\hat{\mathrm{q}}-i\hat{\mathrm{p}}) \tag{4.4.12}$$

El operador $\hat{I}'_{\rho}$, en términos de los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^{\dagger}$, es:

$$\hat{I}'_{\rho} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{q}}^2+\hat{\mathrm{p}}^2\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\right)^2(\hat{a}^{\dagger}+\hat{a})^2 - \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\right)^2(\hat{a}^{\dagger}-\hat{a})^2\right] \tag{4.4.13}$$

$$= \frac{\hbar}{4}\left(\hat{a}^{\dagger 2}+\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^{\dagger}-\hat{a}^{\dagger 2}-\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\right) \tag{4.4.14}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^{\dagger}) \tag{4.4.15}$$

Como $\left[\hat{a},\, \hat{a}^\dagger\right] = 1$, se tiene que $\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$, por tanto $\hat{I}'_\rho$ se puede reexpresar como:

$$\hat{I}'_\rho = \frac{\hbar}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) = \hbar\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{4.4.16}$$

Podemos entonces reescribir el operador $\hat{U}(t, t_0)$ (4.4.2) tal que:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T}^\dagger_\rho \exp\left[-i\alpha\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right]\hat{T}_{\rho_0} \tag{4.4.17}$$

donde

$$\alpha = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{\rho^2(s)} \tag{4.4.18}$$

1) La acción de $\hat{U}(t, t_0)$ sobre $\hat{\mathrm{q}}$ es:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{q}}_H &= \hat{U}^\dagger(t, t_0)\,\hat{\mathrm{q}}\,\hat{U}(t, t_0) && (4.4.19)\\
&= \hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp\left[i\alpha\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right]\hat{T}_\rho\,\hat{\mathrm{q}}\,\hat{T}^\dagger_\rho \exp\left[-i\alpha\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right]\hat{T}_{\rho_0} && (4.4.20)\\
&= \hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp\left[i\alpha\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right]\rho(t)\hat{\mathrm{q}}\exp\left[-i\alpha\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right]\hat{T}_{\rho_0} && (4.4.21)
\end{aligned}$$

usando el resultado (4.2.46). Claramente, las exponenciales no conmutan con $\hat{\mathrm{q}}$. Para calcular su acción sobre $\hat{\mathrm{q}}$, primero, separemos las exponenciales en los productos:

$$\begin{aligned}
\exp\left[i\alpha\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right] &= \exp\left(i\alpha\,\frac{1}{2}\right)\exp\left(i\alpha\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\\
\exp\left[-i\alpha\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right] &= \exp\left(-i\alpha\,\frac{1}{2}\right)\exp\left(-i\alpha\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)
\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

Esto es posible ya que $i\alpha/2$ es constante, y por lo tanto conmuta con cualquier operador. Volviendo a (4.4.21):

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{q}}_H &= \hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp\left[i\alpha\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right]\rho(t)\hat{\mathrm{q}}\exp\left[-i\alpha\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right]\hat{T}_{\rho_0} && (4.4.23)\\
&= \hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp\left(i\alpha\,\frac{1}{2}\right)\exp\left(i\alpha\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\rho(t)\hat{\mathrm{q}}\exp\left(-i\alpha\,\frac{1}{2}\right)\exp\left(-i\alpha\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{T}_{\rho_0} && (4.4.24)\\
&= \hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp\left(i\alpha\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\rho(t)\hat{\mathrm{q}}\exp\left(-i\alpha\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{T}_{\rho_0} && (4.4.25)
\end{aligned}$$

Reescribiendo $\hat{\mathrm{q}}$ en términos de los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ con (4.4.11), queda:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{q}}_H &= \hat{T}^\dagger_{\rho_0}\left[\exp\left(i\alpha\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\rho(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})\exp\left(-i\alpha\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\right]\hat{T}_{\rho_0} && (4.4.26)\\
&= \rho(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left[\hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp\left(i\alpha\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{a}^\dagger\exp\left(-i\alpha\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{T}_{\rho_0}\right] && (4.4.27)\\
&+ \rho(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left[\hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp\left(i\alpha\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{a}\exp\left(-i\alpha\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{T}_{\rho_0}\right] && (4.4.28)
\end{aligned}$$

Para continuar, hay que introducir la siguiente propiedad. Sea el operador $\hat{H} = \beta \hat{a}^\dagger \hat{a}$, con $\beta \in \mathbb{C}$ una constante. Entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}, F(\hat{H})\right] &= \hat{a}(F(\hat{H}) - F(\hat{H} - \beta)) = (F(\hat{H} + \beta) - F(\hat{H}))\hat{a} \\ \left[\hat{a}^\dagger, F(\hat{H})\right] &= \hat{a}^\dagger(F(\hat{H}) - F(\hat{H} + \beta)) = (F(\hat{H} - \beta) - F(\hat{H}))\hat{a}^\dagger \end{aligned} \tag{4.4.29}$$

siendo $F(\hat{H})$ una función del operador $\hat{H}$. Esta propiedad se puede demostrar por inducción. En nuestro caso,

$$F(\hat{H}) = \exp(\hat{H})\,,\ \text{y}\ \hat{H} = -i\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}\,,\ \text{con}\ \beta = -i\alpha \tag{4.4.30}$$

Yendo primero con (4.4.27), tenemos:

$$\rho(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left[\hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp(-\hat{H})\hat{a}^\dagger\exp(\hat{H})\hat{T}_{\rho_0}\right] \tag{4.4.31}$$

donde de momento nos interesa solo:

$$\exp(-\hat{H})\hat{a}^\dagger\exp(\hat{H}) \tag{4.4.32}$$

De forma similar a como hicimos en (4.2.7), podemos expresar esta expresión como:

$$\exp(-\hat{H})\hat{a}^\dagger\exp(\hat{H}) = \hat{a}^\dagger + \exp(-\hat{H})\left[\hat{a}^\dagger, \exp(\hat{H})\right] \tag{4.4.33}$$

Es obvio comprobar que esto se puede hacer porque $\exp(-\hat{H})\exp(\hat{H}) = 1$. El conmutador de $\hat{a}^\dagger$ y $\exp(\hat{H})$ se puede calcular aplicando la propiedad (4.4.29):

$$\left[\hat{a}^\dagger, \exp(\hat{H})\right] = \Big(\exp(\hat{H} + i\alpha) - \exp(\hat{H})\Big)\,\hat{a}^\dagger \tag{4.4.34}$$

Entonces, volviendo a (4.4.33):

$$\begin{aligned} \exp(-\hat{H})\hat{a}^\dagger\exp(-\hat{H}) &= \hat{a}^\dagger + \exp(\hat{H})\Big(\exp(\hat{H} + i\alpha) - \exp(\hat{H})\Big)\,\hat{a}^\dagger && (4.4.35) \\ &= \hat{a}^\dagger + \exp(-\hat{H})\exp(\hat{H})\exp(i\alpha)\hat{a}^\dagger - \exp(-\hat{H})\exp(\hat{H})\hat{a}^\dagger && (4.4.36) \\ &= \exp(i\alpha)\hat{a}^\dagger && (4.4.37) \end{aligned}$$

y (4.4.27) queda:

$$\rho(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left[\hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp(i\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{T}_{\rho_0}\right] \tag{4.4.38}$$

Siguiendo el mismo proceso pero con el segundo término, (4.4.28), quedaría:

$$\exp(-\hat{H})\hat{a}\exp(\hat{H}) = \hat{a} + \exp(-\hat{H})\left[\hat{a}, \exp(\hat{H})\right] \tag{4.4.39}$$

donde el conmutador, siguiendo la propiedad (4.4.29), es:

$$\left[\hat{a}, \exp(\hat{H})\right] = \Big(\exp(\hat{H} - i\alpha) - \exp(\hat{H})\Big)\,\hat{a} \tag{4.4.40}$$

entonces volviendo a (4.4.39):

$$\begin{aligned}
\exp(-\hat{H})\hat{a}\exp(\hat{H}) &= \hat{a} + \exp(-\hat{H})\left(\exp(\hat{H} - i\alpha) - \exp(\hat{H})\right)\hat{a} && (4.4.41)\\
&= \hat{a} + \exp(-\hat{H})\exp(\hat{H})\exp(-i\alpha)\hat{a} - \exp(-\hat{H})\exp(\hat{H})\hat{a} && (4.4.42)\\
&= \exp(-i\alpha)\hat{a} && (4.4.43)
\end{aligned}$$

y (4.4.28) queda:

$$\rho(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left[\hat{T}^{\dagger}_{\rho_0}\exp(-i\alpha)\hat{a}\hat{T}_{\rho_0}\right] \tag{4.4.44}$$

juntando (4.4.38) y (4.4.44), finalmente se tiene que:

$$\hat{\mathrm{q}}_H = \rho(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left[\hat{T}^{\dagger}_{\rho_0}\exp(i\alpha)\hat{a}^{\dagger}\hat{T}_{\rho_0} + \hat{T}^{\dagger}_{\rho_0}\exp(-i\alpha)\hat{a}\hat{T}_{\rho_0}\right] \tag{4.4.45}$$

Ya solo faltaría ver la acción de $\hat{T}^{\dagger}_{\rho_0}$. Para ello, volvamos a expresarlo todo en términos de las coordenadas $\hat{\mathrm{q}}$ y $\hat{\mathrm{p}}$, pues ya sabemos como actúa el operador $\hat{T}^{\dagger}_{\rho}$ sobre ellas. Usando (4.4.12), la expresión anterior se convierte en:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{q}}_H &= \rho(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left[\hat{T}^{\dagger}_{\rho_0}\exp(i\alpha)\sqrt{\frac{1}{2\hbar}}(\hat{\mathrm{q}} - i\hat{\mathrm{p}})\hat{T}_{\rho_0} + \hat{T}^{\dagger}_{\rho_0}\exp(-i\alpha)\sqrt{\frac{1}{2\hbar}}(\hat{\mathrm{q}} + i\hat{\mathrm{p}})\hat{T}_{\rho_0}\right] && (4.4.46)\\
&= \rho(t)\,\frac{1}{2}\left[\exp(i\alpha)\left(\hat{T}^{\dagger}_{\rho_0}(\hat{\mathrm{q}} - i\hat{\mathrm{p}})\hat{T}_{\rho_0}\right) + \exp(-i\alpha)\left(\hat{T}^{\dagger}_{\rho_0}(\hat{\mathrm{q}} + i\hat{\mathrm{p}})\hat{T}_{\rho_0}\right)\right] && (4.4.47)\\
&= \rho(t)\,\frac{1}{2}\left[\exp(i\alpha)\left(\frac{\hat{\mathrm{q}}}{\rho_0} - i(\rho_0\hat{\mathrm{p}} - \dot{\rho}_0\hat{\mathrm{q}})\right) + \exp(-i\alpha)\left(\frac{\hat{\mathrm{q}}}{\rho_0} + i(\rho_0\hat{\mathrm{p}} - \dot{\rho}_0\hat{\mathrm{q}})\right)\right] && (4.4.48)
\end{aligned}$$

donde se ha usado que:

$$\hat{T}^{\dagger}_{\rho_0}\hat{\mathrm{q}}\,\hat{T}_{\rho_0} = \frac{\hat{\mathrm{q}}}{\rho_0} \quad \text{y} \quad \hat{T}^{\dagger}_{\rho_0}\hat{\mathrm{p}}\,\hat{T}_{\rho_0} = \rho_0\hat{\mathrm{p}} - \dot{\rho}_0\hat{\mathrm{q}}\,, \tag{4.4.49}$$

resultados que se obtienen trivialmente a partir de (4.2.46) y (4.2.49). Siguiendo con los cálculos:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{q}}_H &= \rho(t)\,\frac{1}{2}\left[\frac{\hat{\mathrm{q}}}{\rho_0}\left(\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)\right) - i(\rho_0\hat{\mathrm{p}} - \dot{\rho}_0\hat{\mathrm{q}})\left(\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)\right)\right] && (4.4.50)\\
&= \rho(t)\,\frac{1}{2}\left[\frac{\hat{\mathrm{q}}}{\rho_0}2\cos\alpha + (\rho_0\hat{\mathrm{p}} - \dot{\rho}_0\hat{\mathrm{q}})2\,\mathrm{sen}\,\alpha\right] && (4.4.51)
\end{aligned}$$

donde se ha aplicado las formas exponenciales complejas del seno y el coseno,

$$\cos\alpha = \frac{\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)}{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)}{2i} \tag{4.4.52}$$

Simplificando y reordenando términos en (4.4.51):

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{q}}_H &= \rho(t)\left(\frac{\cos\alpha}{\rho_0}\hat{\mathrm{q}} + \rho_0\,\mathrm{sen}\,\alpha\hat{\mathrm{p}} - \dot{\rho}_0\,\mathrm{sen}\,\alpha\hat{\mathrm{q}}\right) && (4.4.53)\\
\hat{\mathrm{q}}_H &= \rho(t)\left(\frac{1}{\rho_0}\cos\alpha - \dot{\rho}_0\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)\hat{\mathrm{q}} + \rho(t)\rho_0\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{\mathrm{p}} && (4.4.54)
\end{aligned}$$

que es finalmente la primera expresión que queríamos demostrar.

2) Siguiendo un proceso totalmente análogo al anterior, pero ahora para $\hat{\mathrm{p}}$, tendríamos:

$$\hat{\mathrm{p}}_H = \hat{U}^\dagger(t,t_0)\,\hat{\mathrm{p}}\,\hat{U}(t,t_0) \tag{4.4.55}$$

$$= \hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp\left[i\alpha\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\right]\hat{T}_\rho\,\hat{\mathrm{p}}\,\hat{T}^\dagger_\rho\exp\left[-i\alpha\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\right]\hat{T}_{\rho_0} \tag{4.4.56}$$

$$= \hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp\left[i\alpha\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\right]\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}}{\rho(t)}+\dot{\rho}(t)\hat{\mathrm{q}}\right)\exp\left[-i\alpha\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\right]\hat{T}_{\rho_0} \tag{4.4.57}$$

De nuevo, podemos separar la exponencial, y los términos $\exp(i\alpha/2)$ y $\exp(-i\alpha/2)$ se cancelan, quedando:

$$\hat{\mathrm{p}}_H = \hat{T}^\dagger_{\rho_0}\left[\exp\left(i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}}{\rho(t)}+\dot{\rho}(t)\hat{\mathrm{q}}\right)\exp\left(-i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\right]\hat{T}_{\rho_0} \tag{4.4.58}$$

$$= \hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp\left(i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}}{\rho(t)}\right)\exp\left(-i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{T}_{\rho_0} \tag{4.4.59}$$

$$+\hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp\left(i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\left(\dot{\rho}(t)\hat{\mathrm{q}}\right)\exp\left(-i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{T}_{\rho_0} \tag{4.4.60}$$

El último término, identificándolo con la expresión (4.4.25), es $\hat{\mathrm{q}}_H\dot{\rho}(t)/\rho(t)$. La expresión anterior se convierte en:

$$\hat{\mathrm{p}}_H = \hat{T}^\dagger_{\rho_0}\exp\left(i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}}{\rho(t)}\right)\exp\left(-i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{T}_{\rho_0}+\hat{\mathrm{q}}_H\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \tag{4.4.61}$$

Vamos primero con la acción de la exponencial sobre $\hat{\mathrm{p}}$. Pasándolo a su expresión en términos de $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$:

$$\exp\left(i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\frac{i}{\rho(t)}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\hat{a}^\dagger-\hat{a})\exp\left(-i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)$$

$$=\frac{i}{\rho(t)}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left[\exp\left(i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{a}^\dagger\exp\left(-i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)-\exp\left(i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{a}\exp\left(-i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\right] \tag{4.4.62}$$

que, como ya se calculó en anteriormente en (4.4.37) y (4.4.43), quedaría:

$$\frac{i}{\rho(t)}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\exp(i\alpha)\hat{a}^\dagger-\exp(-i\alpha)\hat{a}\right) \tag{4.4.63}$$

y volviendo a (4.4.61):

$$\hat{\mathrm{p}}_H = \hat{T}^\dagger_{\rho_0}\frac{i}{\rho(t)}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\exp(i\alpha)\hat{a}^\dagger-\exp(-i\alpha)\hat{a}\right)\hat{T}_{\rho_0}+\hat{\mathrm{q}}_H\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \tag{4.4.64}$$

Cambiando $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ por $\hat{\mathrm{p}}$ y $\hat{\mathrm{q}}$, usando (4.4.12), queda finalmente:

$$\hat{\mathrm{p}}_H = \hat{T}^\dagger_{\rho_0}\frac{i}{\rho(t)}\frac{1}{2}\left[\exp(i\alpha)(\hat{\mathrm{q}} - i\hat{\mathrm{p}}) - \exp(-i\alpha)(\hat{\mathrm{q}} + i\hat{\mathrm{p}})\right]\hat{T}_{\rho_0} + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}_H \tag{4.4.65}$$

$$= \frac{i}{2\,\rho(t)}\left[\exp(i\alpha)\left(\frac{\hat{\mathrm{q}}}{\rho_0} - i(\rho_0\hat{\mathrm{p}} - \dot{\rho}_0\hat{\mathrm{q}})\right) - \exp(-i\alpha)\left(\frac{\hat{\mathrm{q}}}{\rho_0} + i(\rho_0\hat{\mathrm{p}} - \dot{\rho}_0\hat{\mathrm{q}})\right)\right] + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}_H \tag{4.4.66}$$

$$= \frac{i}{2\,\rho(t)}\left[\frac{\hat{\mathrm{q}}}{\rho_0}(\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)) - i(\rho_0\hat{\mathrm{p}} - \dot{\rho}_0\hat{\mathrm{q}})(\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha))\right] + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}_H \tag{4.4.67}$$

$$= \frac{i}{2\,\rho(t)}\left[\frac{\hat{\mathrm{q}}}{\rho_0}2i\operatorname{sen}\alpha - i(\rho_0\hat{\mathrm{p}} - \dot{\rho}_0\hat{\mathrm{q}})2\cos\alpha\right] + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}_H \tag{4.4.68}$$

$$= \frac{1}{\rho(t)}\left[-\frac{\hat{\mathrm{q}}}{\rho_0}\operatorname{sen}\alpha + (\rho_0\hat{\mathrm{p}} - \dot{\rho}_0\hat{\mathrm{q}})\cos\alpha\right] + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}_H \tag{4.4.69}$$

$$= -\frac{1}{\rho(t)}\left[\frac{\hat{\mathrm{q}}}{\rho_0}\operatorname{sen}\alpha - \rho_0\hat{\mathrm{p}}\cos\alpha + \dot{\rho}_0\hat{\mathrm{q}}\cos\alpha\right] + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}_H \tag{4.4.70}$$

$$= -\frac{1}{\rho(t)}\left(\frac{1}{\rho_0}\operatorname{sen}\alpha + \dot{\rho}_0\cos\alpha\right)\hat{\mathrm{q}} + \frac{\rho_0}{\rho(t)}\cos\alpha\,\hat{\mathrm{p}} + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}_H \tag{4.4.71}$$

que es la expresión a la que queríamos llegar.

3) Faltaría ver que $\hat{\mathrm{p}}_H$ es la derivada temporal de $\hat{\mathrm{q}}_H$. Para ello usaremos la ecuación del movimiento de Heisenberg nos dice que la derivada de un operador en la imagen de Heisenberg con respecto del tiempo es:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{A}_H(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H(t), \hat{\mathcal{H}}_H(t)\right] + \left[\frac{\partial\hat{A}_S}{\partial t}\right]_H \tag{4.4.72}$$

donde el hamiltoniano está también en representación de Heisenberg, es decir:

$$\hat{\mathcal{H}}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{\mathcal{H}}(t)\hat{U}(t,t_0) \tag{4.4.73}$$

Utilicemos la ecuación de Heisenberg (4.4.72) con el operador $\hat{\mathrm{q}}_H(t)$. Pero primero, hay que hallar la expresión de $\hat{\mathcal{H}}_H(t)$. Sustituyendo el hamiltoniano (4.1.3) en la expresión anterior:

$$\hat{\mathcal{H}}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t,t_0)\frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{p}}^2 + \Omega^2(t)\hat{\mathrm{q}}^2\right)\hat{U}(t,t_0) \tag{4.4.74}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\hat{U}^\dagger(t,t_0)\,\hat{\mathrm{p}}^2\hat{U}(t,t_0) + \Omega^2(t)\hat{U}^\dagger(t,t_0)\,\hat{\mathrm{q}}^2\hat{U}(t,t_0)\right) \tag{4.4.75}$$

Ahora, $\hat{U}^\dagger(t,t_0)\,\hat{\mathrm{p}}^2\hat{U}(t,t_0)$ y $\hat{U}^\dagger(t,t_0)\,\hat{\mathrm{q}}^2\hat{U}(t,t_0)$ son simplemente $\hat{\mathrm{p}}_H^2$ y $\hat{\mathrm{q}}_H^2$, recordando las igualdades (4.4.7). El hamiltoniano entonces queda así:

$$\hat{\mathcal{H}}_H(t) = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{p}}_H^2 + \Omega^2(t)\hat{\mathrm{q}}_H^2\right) \tag{4.4.76}$$

Tenemos que calcular la parte derecha de la ecuación de Heisenberg. El último término representa la derivada temporal de $\hat{\mathrm{q}}$, todo ello en la imagen de Heisenberg. Al no depender del tiempo, este se anula. Por tanto, solo tendríamos que ver el primer término. Este es:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\mathrm{q}}_H, \hat{\mathcal{H}}_H\right] &= \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\mathrm{q}}_H, \frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{p}}_H^2 + \Omega^2\hat{\mathrm{q}}_H^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2i\hbar}\left[\hat{\mathrm{q}}_H, \hat{\mathrm{p}}_H^2\right] \end{aligned} \tag{4.4.77}$$

Veamos el conmutador $[\hat{\mathrm{q}}_H, \hat{\mathrm{p}}_H^2]$:

$$\left[\hat{\mathrm{q}}_H, \hat{\mathrm{p}}_H^2\right] = \hat{\mathrm{p}}_H\left[\hat{\mathrm{q}}_H, \hat{\mathrm{p}}_H\right] + \left[\hat{\mathrm{q}}_H, \hat{\mathrm{p}}_H\right]\hat{\mathrm{p}}_H \tag{4.4.78}$$

Donde, sustituyendo con las expresiones de $\hat{\mathrm{q}}_H$ (4.4.54) y $\hat{\mathrm{p}}_H$ (4.4.71) :

$$\begin{aligned}
[\hat{\mathrm{q}}_H, \hat{\mathrm{p}}_H] = &\left[\rho(t)\left(\frac{1}{\rho_0}\cos\alpha - \dot{\rho}_0\operatorname{sen}\alpha\right)\hat{\mathrm{q}} + \rho(t)\rho_0\operatorname{sen}\alpha\,\hat{\mathrm{p}}\,,\right. && (4.4.79)\\
&\left. -\frac{1}{\rho(t)}\left(\frac{1}{\rho_0}\operatorname{sen}\alpha + \dot{\rho}_0\cos\alpha\right)\hat{\mathrm{q}} + \frac{\rho_0}{\rho(t)}\cos\alpha\,\hat{\mathrm{p}} + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}_H\right] \\
&= \left[\rho(t)\left(\frac{1}{\rho_0}\cos\alpha - \dot{\rho}_0\operatorname{sen}\alpha\right)\hat{\mathrm{q}}\,, \frac{\rho_0}{\rho(t)}\cos\alpha\,\hat{\mathrm{p}}\right] && (4.4.80)\\
&+ \left[\rho(t)\rho_0\operatorname{sen}\alpha\,\hat{\mathrm{p}}\,, -\frac{1}{\rho(t)}\left(\frac{1}{\rho_0}\operatorname{sen}\alpha + \dot{\rho}_0\cos\alpha\right)\hat{\mathrm{q}}\right] \\
&= \rho_0\left(\frac{1}{\rho_0}\cos\alpha - \dot{\rho}_0\operatorname{sen}\alpha\right)\cos\alpha\,[\hat{\mathrm{q}}, \hat{\mathrm{p}}] && (4.4.81)\\
&- \rho_0\operatorname{sen}\,\alpha\left(\frac{1}{\rho_0}\operatorname{sen}\alpha + \dot{\rho}_0\cos\alpha\right)[\hat{\mathrm{p}}, \hat{\mathrm{q}}] \\
&= \left(\cos^2\alpha - \rho_0\dot{\rho}_0\operatorname{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)i\hbar - \left(\operatorname{sen}^2\alpha + \rho_0\dot{\rho}_0\operatorname{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)(-i\hbar) && (4.4.82)\\
&= \left(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\right)i\hbar && (4.4.83)\\
&= i\hbar && (4.4.84)
\end{aligned}$$

que es el resultado que cabía esperar. Así, volviendo a (4.4.78):

$$\left[\hat{\mathrm{q}}_H, \hat{\mathrm{p}}_H^2\right] = \hat{\mathrm{p}}_H\, i\hbar + i\hbar\,\hat{\mathrm{p}}_H = 2i\hbar\,\hat{\mathrm{p}}_H \tag{4.4.85}$$

Finalmente, sustituyendo esto en (4.4.77) tendríamos:

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\mathrm{q}}_H, \hat{\mathcal{H}}_H\right] = \frac{1}{2i\hbar}2i\hbar\,\hat{\mathrm{p}}_H = \hat{\mathrm{p}}_H\,, \tag{4.4.86}$$

es decir, por la ecuación de Heisenberg se cumple que:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{q}}_H(t)}{\mathrm{d}t} = \hat{\mathrm{p}}_H(t) \tag{4.4.87}$$

tal y como se quería demostrar. □

Este último resultado muestra como existe una notable similitud entre la imagen de Heisenberg de la mecánica cuántica y las ecuaciones de mecánica clásicas. Podríamos ir aún más allá, y comprobar si las ecuaciones de Hamilton, que describen todo el movimiento de cualquier sistema, se cumplen también.

Proposición 4.7. *Dentro de la imagen de Heisenberg, se mantienen las ecuaciones de Hamilton de mecánica clásica:*

$$\begin{aligned} \textit{1)} \quad & i\hbar \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{q}}_H(t)}{\mathrm{d}t} = i\hbar \frac{\partial \hat{H}_H(t)}{\partial \hat{\mathrm{p}}_H} \\ \textit{2)} \quad & i\hbar \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{p}}_H(t)}{\mathrm{d}t} = -i\hbar \frac{\partial \hat{H}_H(t)}{\partial \hat{\mathrm{q}}_H} \end{aligned} \tag{4.4.88}$$

Demostración. **1)** Como se acaba de demostrar, la derivada temporal de $\hat{\mathrm{q}}_H$ es $\hat{\mathrm{p}}_H$. En el otro lado de la ecuación, tenemos la derivada del hamiltoniano con respecto de $\hat{\mathrm{p}}_H$, que es:

$$\frac{\partial \hat{H}_H(t)}{\partial \hat{\mathrm{p}}_H} = \frac{\partial}{\partial \hat{\mathrm{p}}_H} \frac{1}{2} \left(\hat{\mathrm{p}}_H^2 + \Omega^2 \hat{\mathrm{q}}_H^2 \right) = \hat{\mathrm{p}}_H \tag{4.4.89}$$

Por tanto, la primera ecuación es:

$$i\hbar\, \hat{\mathrm{p}}_H = i\hbar\, \hat{\mathrm{p}}_H \tag{4.4.90}$$

comprobándose la igualdad.

2) Veamos primero la parte izquierda. Por la ecuación de Heisenberg (4.4.72) sería:

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{p}}_H(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{i\hbar}{i\hbar} \left[\hat{\mathrm{p}}_H, \hat{\mathcal{H}}_H \right] = \frac{1}{2} \left[\hat{\mathrm{p}}_H + \left(\hat{\mathrm{p}}_H^2, \Omega^2 \hat{\mathrm{q}}_H^2 \right) \right] = \frac{\Omega^2}{2} \left[\hat{\mathrm{p}}_H, \hat{\mathrm{q}}_H^2 \right] \tag{4.4.91}$$

Desarrollando el conmutador:

$$\left[\hat{\mathrm{p}}_H, \hat{\mathrm{q}}_H^2 \right] = \hat{\mathrm{q}}_H \left[\hat{\mathrm{p}}_H, \hat{\mathrm{q}}_H \right] + \left[\hat{\mathrm{p}}_H, \hat{\mathrm{q}}_H \right] \hat{\mathrm{q}}_H \tag{4.4.92}$$

Ya vimos que $[\hat{\mathrm{q}}_H, \hat{\mathrm{p}}_H] = i\hbar$, por tanto $[\hat{\mathrm{p}}_H, \hat{\mathrm{q}}_H] = -[\hat{\mathrm{q}}_H, \hat{\mathrm{p}}_H] = -i\hbar$. Volviendo a la expresión anterior:

$$\left[\hat{\mathrm{p}}_H, \hat{\mathrm{q}}_H^2 \right] = -\hat{\mathrm{q}}_H\, i\hbar - i\hbar\, \hat{\mathrm{q}}_H = -2i\hbar\, \hat{\mathrm{q}}_H \tag{4.4.93}$$

Sustituyendo en (4.4.91) queda:

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{p}}_H(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\Omega^2}{2} \left(-2i\hbar\, \hat{\mathrm{q}}_H \right) = -i\hbar\Omega^2 \hat{\mathrm{q}}_H \tag{4.4.94}$$

Vamos ahora con la parte de la derecha, que es:

$$-i\hbar \frac{\partial \hat{H}_H(t)}{\partial \hat{\mathrm{q}}_H} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{\mathrm{q}}_H} \left(\frac{1}{2} \left(\hat{\mathrm{p}}_H^2 + \Omega^2 \hat{\mathrm{q}}_H^2 \right) \right) = -i\hbar\Omega^2 \hat{\mathrm{q}}_H \tag{4.4.95}$$

Así que finalmente vemos que la segunda ecuación de Hamilton queda:

$$-i\hbar\Omega^2 \hat{\mathrm{q}}_H = -i\hbar\Omega^2 \hat{\mathrm{q}}_H \tag{4.4.96}$$

comprobándose así que se cumple también. □

Ahora podemos ver como, a diferencia de la imagen de Schrödinger, en la que se suele trabajar, la imagen de Heisenberg permite visualizar muy claramente si se cumplen las ecuaciones clásicas del movimiento, lo cual puede resultar de gran utilidad.

Que se cumplan estas ecuaciones implica, en particular, que en la expresión de $\hat{\mathrm{q}}_H$ (4.4.54), los coeficientes de $\hat{\mathrm{p}}$ y $\hat{\mathrm{q}}$ cumplirían la ecuación del movimiento del sistema, en nuestro caso la del oscilador armónico dependiente del tiempo, $\ddot{\psi}(t) + \Omega^2(t)\psi(t) = 0$. Estos coeficientes coinciden exactamente con los de la expresión (3.3.24) que obtuvimos al final del primer apartado, donde ya comprobamos que, efectivamente, son soluciones de esta ecuación. Con este interesante hecho, damos por concluido este pequeño análisis de la imagen de Heisenberg y seguimos con el estudio del operador de evolución. Cabe mencionar que, aunque se va a continuar en la imagen de Schrödinger, se podría seguir con la de Heisenberg en su lugar. Lamentablemente, este cambio no simplificará los cálculos, con lo cual es indiferente trabajar en una imagen u otra.

4.4.2. Elementos de matriz del operador unitario de evolución

Queremos encontrar ahora una expresión cerrada para el operador unitario de evolución en la base de posiciones, $|q\rangle$. La función de onda en esta base es:

$$\psi(t) = \langle q|\Psi(t)\rangle = \langle q|\hat{U}(t,t_0)|\Psi(t_0)\rangle \tag{4.4.97}$$

con $|\Psi(t)\rangle$ el estado en el que se encuentra el sistema, $|\Psi(t_0)\rangle$ el mismo estado en un tiempo inicial t_0. Introduciendo la relación de cierre

$$\mathbb{1} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q' |q'\rangle\langle q'| \,, \tag{4.4.98}$$

se tiene que:

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}q' \langle q|\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle\langle q'|\Psi(t_0)\rangle \tag{4.4.99}$$

donde podemos definir

$$U_{q,q'}(t,t_0) := \langle q|\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle \tag{4.4.100}$$

como los elementos de matriz del operador de evolución en la base de posiciones, y $\langle q'|\Psi(t_0)\rangle$ sería la función de onda en el instante inicial t_0 en la base de posiciones. El objetivo es obtener la expresión de $U_{q,q'}(t,t_0)$. Desarrollandola usando (4.4.2),

$$U_{q,q'}(t,t_0) = \langle q|\hat{T}_\rho^\dagger \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sigma \hat{I}'_\rho\right) \hat{T}_{\rho 0}|q'\rangle \tag{4.4.101}$$

donde

$$\sigma = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{\rho^2(s)} \tag{4.4.102}$$

Introduciendo dos relaciones de cierre más,

$$\mathbb{1} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\bar{q}|\bar{q}\rangle\langle\bar{q}| \quad \text{y} \quad \mathbb{1} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\check{q}|\check{q}\rangle\langle\check{q}| \tag{4.4.103}$$

la expresión de $U_{q,q'}(t,t_0)$ resulta:

$$U_{q,q'}(t,t_0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\bar{q} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\check{q} \langle q|\hat{T}_\rho^\dagger|\bar{q}\rangle\langle\bar{q}| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sigma\, \hat{I}'_\rho\right) |\check{q}\rangle\langle\check{q}|\hat{T}_{\rho 0}|q'\rangle \tag{4.4.104}$$

Empecemos por la exponencial. Primero, recordemos que $\hat{I}'_\rho$ toma la forma del hamiltoniano de un oscilador armónico independiente del tiempo con frecuencia unidad. Por tanto, podemos tomar la base de autovectores $|n\rangle$, tal que:

$$\hat{I}'_\rho|n\rangle = \hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle\,, \quad n\in\mathbb{N} \tag{4.4.105}$$

donde $\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)$ son los autovalores asociados (la energía del oscilador). En general, hay infinitos autoestados discretos en este sistema. Por tanto, se tiene la relación de cierre:

$$\mathbb{1} = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| \tag{4.4.106}$$

que podemos introducir en (4.4.104) así:

$$U_{q,q'}(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\bar{q}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\check{q}\langle q|\hat{T}_\rho^\dagger|\bar{q}\rangle\langle\bar{q}|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sigma\,\hat{I}'_\rho\right)|n\rangle\langle n|\check{q}\rangle\langle\check{q}|\hat{T}_{\rho_0}|q'\rangle \tag{4.4.107}$$

Si se pone la exponencial en forma de sumatorio:

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sigma\,\hat{I}'_\rho\right)|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\sigma\right)^n(\hat{I}'_\rho)^n|n\rangle \tag{4.4.108}$$

Por (4.4.105), el operador $\hat{I}'_\rho$ multiplicado n veces por $|n\rangle$ será

$$(\hat{I}'_\rho)^n|n\rangle = \left[\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^n|n\rangle \tag{4.4.109}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sigma\,\hat{I}'_\rho\right)|n\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\sigma\right)^n\left[\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^n|n\rangle\\ &= \exp\left(-i\sigma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)|n\rangle\end{aligned} \tag{4.4.110}$$

De hecho, en general, si un operador $\hat{A}$ tiene un autoestado $|a\rangle$ con autovalor a, se cumple que:

$$\mathrm{e}^A|a\rangle = \mathrm{e}^a|a\rangle \tag{4.4.111}$$

Esto se puede comprobar siguiendo exactamente el desarrollo anterior.

Sustituyendo en (4.4.107) y reordenando:

$$U_{q,q'}(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\bar{q}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\check{q}\langle q|\hat{T}_\rho^\dagger|\bar{q}\rangle\langle\bar{q}|n\rangle\exp\left(-i\sigma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\langle n|\check{q}\rangle\langle\check{q}|\hat{T}_{\rho_0}|q'\rangle \tag{4.4.112}$$

Las funciones de onda $\langle q|n\rangle$, solución del oscilador armónico independiente del tiempo, toman la expresión:

$$\langle q|n\rangle = \left(\frac{\alpha}{n!2^n\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}H_n(\alpha q)\exp\left(\frac{-\alpha^2q^2}{2}\right) \tag{4.4.113}$$

con $\alpha = \sqrt{1/\hbar}$ y $H_n(x)$ los polinomios de Hermite. Además, $\langle q|n\rangle = \langle n|q\rangle$, pues al tener valores reales es igual a su conjugado. La expresión de los elementos de matriz del operador de evolución quedaría:

$$\begin{aligned} U_{q,q'}(t,t_0) = &\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\bar{q} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\check{q} \langle q|\hat{T}_\rho^\dagger|\bar{q}\rangle\langle\check{q}|\hat{T}_{\rho_0}|q'\rangle \exp\left(-i\sigma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) \\ &\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}(\bar{q}^2+\check{q}^2)\right)\frac{1}{n!2^n\sqrt{\pi\hbar}} H_n\left(\frac{\bar{q}}{\sqrt{\hbar}}\right) H_n\left(\frac{\check{q}}{\sqrt{\hbar}}\right) \end{aligned} \tag{4.4.114}$$

Faltaría calcular los elementos de matriz de $\hat{T}_\rho^\dagger$ y $\hat{T}_{\rho_0}$ en la base de posiciones. Se va a buscar la expresión general, esta es:

$$\langle q|\hat{T}_\rho|q'\rangle \tag{4.4.115}$$

para después sustituir convenientemente (ρ por ρ_0, por ejemplo). Usando la definición de $\hat{T}_\rho$ se tiene:

$$\langle q|\hat{T}_\rho|q'\rangle = \langle q| \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\log\rho(t)(\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}+\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\right)\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}^2\right)|q'\rangle \tag{4.4.116}$$

Obsérvese que $|q'\rangle$ es autoestado del operador $\hat{\mathrm{q}}^2$. Esto se ve fácilmente sabiendo que los vectores $|q'\rangle$ son autoestados del operador de posición $\hat{\mathrm{q}}$:

$$\hat{\mathrm{q}}^2|q'\rangle = \hat{\mathrm{q}}\,\hat{\mathrm{q}}\,|q'\rangle = \hat{\mathrm{q}}q'|q'\rangle = q'^2|q'\rangle \tag{4.4.117}$$

Por tanto, usando la propiedad (4.4.111):

$$\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\mathrm{q}}^2\right)|q'\rangle = \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q'^2\right)|q'\rangle \tag{4.4.118}$$

y entonces:

$$\langle q|\hat{T}_\rho|q'\rangle = \langle q| \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\log\rho(t)(\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}+\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\right)|q'\rangle \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q'^2\right) \tag{4.4.119}$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}+\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}} = \hat{\mathrm{q}}\hat{\mathrm{p}}-\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}}+2\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}} = [\hat{\mathrm{q}},\hat{\mathrm{p}}]+2\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}} = i\hbar+2\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}}\,, \tag{4.4.120}$$

podemos realizar el siguiente cambio:

$$\langle q|\hat{T}_\rho|q'\rangle = \langle q| \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\log\rho(t)(i\hbar+2\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\right)|q'\rangle \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q'^2\right) \tag{4.4.121}$$

$$= \langle q| \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\log\rho(t)2\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}}\right)|q'\rangle \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\log\rho(t)i\hbar\right)\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q'^2\right) \tag{4.4.122}$$

$$= \langle q| \exp\left(\frac{i}{\hbar}\log\rho(t)\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}}\right)|q'\rangle \exp\left(-\frac{1}{2}\log\rho(t)\right)\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q'^2\right) \tag{4.4.123}$$

El producto que falta, $\langle q| \exp\left(\frac{i}{\hbar}\log\rho(t)\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}}\right)|q'\rangle$, no es tan sencillo de calcular como los anteriores. Primero, desarrollemos en forma de sumatorio:

$$\langle q| \exp\left(\frac{i}{\hbar}\log\rho(t)\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}}\right)|q'\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}\log\rho(t)\right)^n \langle q|\,(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})^n\,|q'\rangle \tag{4.4.124}$$

Llamemos $f_n(q,q')$ a la expresión

$$f_n(q,q') = \left(\frac{i}{\hbar}\log\rho(t)\right)^n \langle q|\,(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})^n\,|q'\rangle\,, \tag{4.4.125}$$

de forma que

$$\langle q|\exp\left(\frac{i}{\hbar}\log\rho(t)\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}}\right)|q'\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_n(q,q') \tag{4.4.126}$$

Vamos a buscar una relación de recurrencia para f_n. Miremos el término $n+1$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(q,q') &= \left(\frac{i}{\hbar}\log\rho(t)\right)^{n+1}\langle q|\,(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})^n\,(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\,|q'\rangle && (4.4.127)\\ &= \left(\frac{i}{\hbar}\log\rho(t)\right)^{n+1}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\tilde{q}\langle q|\,(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})^n\,|\tilde{q}\rangle\langle\tilde{q}|\,(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\,|q'\rangle && (4.4.128)\end{aligned}$$

Se puede ver que esta expresión contiene f_n (4.4.125). Entonces, sustituyendo queda:

$$f_{n+1}(q,q') = \frac{i}{\hbar}\log\rho(t)\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\tilde{q}f_n(q,\tilde{q})\langle\tilde{q}|\,(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\,|q'\rangle \tag{4.4.129}$$

Además, cuando $n=1$, tendremos que:

$$f_1(q,q') = \frac{i}{\hbar}\log\rho(t)\langle q|\,(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\,|q'\rangle\,, \tag{4.4.130}$$

lo cual aparece tambien en la expresión. Es decir, se tiene que:

$$f_{n+1}(q,q') = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\tilde{q}f_n(q,\tilde{q})f_1(\tilde{q},q') \tag{4.4.131}$$

Calculemos ahora $f_1(q,q')$. Se introducirá otra relación de cierre, esta vez con vectores $|p'\rangle$, dentro de (4.4.130):

$$\begin{aligned} f_1(q,q') &= \frac{i}{\hbar}\log\rho(t)\langle q|\,(\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}})\,|q'\rangle && (4.4.132)\\ &= \frac{i}{\hbar}\log\rho(t)q'\langle q|\hat{\mathrm{p}}|q'\rangle && (4.4.133)\\ &= \frac{i}{\hbar}\log\rho(t)q'\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}p'\langle q|\hat{\mathrm{p}}|p'\rangle\langle p'|q'\rangle && (4.4.134)\\ &= \frac{i}{\hbar}\log\rho(t)q'\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}p'\,p'\langle q|p'\rangle\langle p'|q'\rangle && (4.4.135)\end{aligned}$$

donde se ha usado que los vectores $|p'\rangle$ son autoestados del operador $\hat{\mathrm{p}}$, y por tanto $\hat{\mathrm{p}}|p'\rangle = p'|p'\rangle$. Las funciones $\langle q|p'\rangle$ y $\langle p'|q'\rangle$ tienen una forma conocida, pues son las expresiones del momento en base de posiciones y viceversa. Estas son:

$$\begin{aligned}\langle q|p'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}qp'\right)\\ \langle p'|q'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}q'p'\right)\end{aligned} \tag{4.4.136}$$

Introduciéndolas en (4.4.135) queda:

$$f_1(q,q') = \frac{i}{\hbar}\log\rho(t)q'\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}p'p'\exp\left(\frac{i}{\hbar}p'(q-q')\right) \tag{4.4.137}$$

Introducimos ahora la función generalizada delta de Dirac, $\delta(q,q')$, que adopta la siguiente expresión:

$$\delta(q,q') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}p' \exp\left(\frac{i}{\hbar}p'(q-q')\right) \tag{4.4.138}$$

Como se puede observar, es prácticamente igual a lo que tenemos excepto por el término p' extra de nuestra expresión. Sin embargo, es inmediato comprobar que:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial q'}\delta(q,q') = -\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}p' \exp\left(\frac{i}{\hbar}p'(q-q')\right) \tag{4.4.139}$$

Sustituyendo entonces en (4.4.137):

$$f_1(q,q') = -\log\rho(t)q'\frac{\partial}{\partial q'}\delta(q,q') \tag{4.4.140}$$

Volvamos a f_{n+1}. La expresión (4.4.131), según lo que acabamos de obtener, se transforma en:

$$f_{n+1}(q,q') = -\log\rho(t)q'\frac{\partial}{\partial q'}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tilde{q} f_n(q,\tilde{q})\delta(\tilde{q},q') \tag{4.4.141}$$

Por definición, la delta de Dirac cancela la integral y elimina la variable $\tilde{q}$. Queda entonces:

$$f_{n+1}(q,q') = -\log\rho(t)q'\frac{\partial}{\partial q'}f_n(q,q') \tag{4.4.142}$$

que es la relación de recurrencia que buscábamos. Esta expresión nos indica que para pasar de n a $n+1$ se ha de multiplicar f_n por todo lo que va a su izquierda. En particular, si se quiere pasar de $n=1$ a $n+1$, tendríamos que multiplicarlo n veces. Por tanto se da que:

$$f_{n+1}(q,q') = \left(-\log\rho(t)q'\frac{\partial}{\partial q'}\right)^n f_1(q,q') \tag{4.4.143}$$

y para f_n claramente tendríamos:

$$\begin{aligned} f_n(q,q') &= \left(-\log\rho(t)q'\frac{\partial}{\partial q'}\right)^{n-1} f_1(q,q') && (4.4.144)\\ &= \left(-\log\rho(t)q'\frac{\partial}{\partial q'}\right)^{n} \delta(q,q') && (4.4.145)\end{aligned}$$

Si regresamos a la expresión (4.4.126), y sustituimos f_n, queda:

$$\begin{aligned} \langle q|\exp\left(\frac{i}{\hbar}\log\rho(t)\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}}\right)|q'\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\log\rho(t)q'\frac{\partial}{\partial q'}\right)^n\delta(q,q') && (4.4.146)\\ &= \exp\left(-\log\rho(t)q'\frac{\partial}{\partial q'}\right)\delta(q,q') && (4.4.147)\\ &= \delta\left(q,\frac{q'}{\rho(t)}\right) && (4.4.148)\end{aligned}$$

Donde se ha aplicado que:

$$\exp\left(-\log\rho(t)q'\frac{\partial}{\partial q'}\right)\delta(q,q') = \delta\left(q,\exp^{-\ln\rho(t)}q'\right) = \delta\left(q,\frac{q'}{\rho(t)}\right) \tag{4.4.149}$$

que es una propiedad que aparece en álgebra de Lie [22], siendo una caso particular del *"shift operator"* [23]. En general, se comprueba que:

$$\begin{aligned} \exp\left[ln(\lambda)\, x\frac{d}{dx}\right] f(x) &= f(\lambda\, x) \\ \exp\left[-ln(\lambda)\, x\frac{d}{dx}\right] f(x) &= f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned} \tag{4.4.150}$$

Con esto, ya tenemos todos los términos de (4.4.123), y uniéndolos queda:

$$\langle q|\hat{T}_\rho|q'\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\log\rho(t)\right)\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q'^2\right)\delta\left(q, \frac{q'}{\rho(t)}\right) \tag{4.4.151}$$

Dado este resultado, el corchete con $\hat{T}_\rho^\dagger$ sería:

$$\langle q|\hat{T}_\rho^\dagger|q'\rangle = \overline{\langle q'|\hat{T}_\rho|q\rangle} = \exp\left(-\frac{1}{2}\log\rho(t)\right)\exp\left(\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q^2\right)\delta\left(q', \frac{q}{\rho(t)}\right) \tag{4.4.152}$$

donde la barra horizontal indica el complejo conjugado de lo que hay debajo.

Ya tenemos todos los factores de $U_{qq'}$. Regresando a su expresión (4.4.114), tendríamos que primero sustituir los corchetes de $\hat{T}_\rho$ y $\hat{T}_\rho^\dagger$ que se acaban de calcular con las variables pertinentes. Estos son:

$$\langle q|\hat{T}_\rho^\dagger|\bar{q}\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\log\rho(t)\right)\exp\left(\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q^2\right)\delta\left(\bar{q}, \frac{q}{\rho(t)}\right) \tag{4.4.153}$$

$$\langle \check{q}|\hat{T}_{\rho_0}|q'\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\log\rho_0\right)\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0}q'^2\right)\delta\left(\check{q}, \frac{q'}{\rho_0}\right) \tag{4.4.154}$$

y sustituyendolos en la expresión:

$$\begin{aligned} U_{q,q'}(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} d\bar{q}\int_{\mathbb{R}} d\check{q}\exp\left(-\frac{1}{2}\log\rho(t)\right)\exp\left(\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q^2\right)\delta\left(\bar{q}, \frac{q}{\rho(t)}\right) \\ \exp\left(-\frac{1}{2}\log\rho_0\right)\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0}q'^2\right)\delta\left(\check{q}, \frac{q'}{\rho_0}\right)\exp\left(-i\sigma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) \\ \exp\left(-\frac{1}{2\hbar}(\bar{q}^2+\check{q}^2)\right)\frac{1}{n!2^n\sqrt{\pi\hbar}}H_n\left(\frac{\bar{q}}{\sqrt{\hbar}}\right)H_n\left(\frac{\check{q}}{\sqrt{\hbar}}\right) \end{aligned} \tag{4.4.155}$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned} U_{q,q'}(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} d\bar{q}\int_{\mathbb{R}} d\check{q}\exp\left[-\frac{1}{2}\log\left(\rho(t)\rho_0\right)\right]\exp\left[\frac{i}{2\hbar}\left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q^2-\frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0}q'^2\right)\right] \\ \delta\left(\bar{q}, \frac{q}{\rho(t)}\right)\delta\left(\check{q}, \frac{q'}{\rho_0}\right)\exp\left(-i\sigma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}(\bar{q}^2+\check{q}^2)\right) \\ \frac{1}{n!2^n\sqrt{\pi\hbar}}H_n\left(\frac{\bar{q}}{\sqrt{\hbar}}\right)H_n\left(\frac{\check{q}}{\sqrt{\hbar}}\right) \end{aligned} \tag{4.4.156}$$

Igual que se hizo antes, por definición de la función delta de Dirac, las integrales se cancelarán, y las variables $\bar{q}$ y $\check{q}$ serán sustituidas por $q/\rho(t)$ y q'/ρ_0, respectivamente. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}U_{q,q'}(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} &\exp\left[-\frac{1}{2}\log\left(\rho(t)\rho_0\right)\right]\exp\left[\frac{i}{2\hbar}\left(\frac{\dot\rho(t)}{\rho(t)}q^2 - \frac{\dot\rho_0}{\rho_0}q'^2\right)\right]\\ &\exp\left(-i\sigma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\exp\left[-\frac{1}{2\hbar}\left(\frac{q^2}{\rho^2(t)}+\frac{q'^2}{\rho_0^2}\right)\right]\\ &\frac{1}{n!2^n\sqrt{\pi\hbar}}H_n\left(\frac{q}{\rho(t)\sqrt{\hbar}}\right)H_n\left(\frac{q'}{\rho_0\sqrt{\hbar}}\right)\end{aligned} \tag{4.4.157}$$

A continuación se usará la fórmula de Mehler para polinomios de Hermite [24]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(y)}{n!2^n}w^n = (1-w^2)^{-1/2}\exp\left[\frac{2xyw-(x^2+y^2)w^2}{1-w^2}\right] \tag{4.4.158}$$

en la cual tomaremos $w = \exp(-i\sigma\, n)$, y $x = \dfrac{q}{\rho(t)\sqrt{\hbar}}$ e $y = \dfrac{q'}{\rho_0\sqrt{\hbar}}$ que son simplemente los argumentos de los polinomios de Hermite. Aplicándola, la expresión del operador de evolución (4.4.157) se convierte en:

$$\begin{aligned}U_{q,q'}(t,t_0) = &\exp\left\{\left[\frac{2qq'}{\rho(t)\rho_0\hbar}\mathrm{e}^{-i\sigma} - \left(\frac{q^2}{\hbar\rho^2(t)}+\frac{q'^2}{\hbar\rho_0^2}\right)\mathrm{e}^{-2i\,\sigma}\right]\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2i\,\sigma}}\right\}\\ &\exp\left[-\frac{1}{2}\log\left(\rho(t)\rho_0\right)\right]\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\hbar}\exp\left[\frac{i}{2\hbar}\left(\frac{\dot\rho(t)}{\rho(t)}q^2 - \frac{\dot\rho_0}{\rho_0}q'^2\right)\right]\\ &\exp\left[-\frac{1}{2\hbar}\left(\frac{q^2}{\rho^2(t)}+\frac{q'^2}{\rho_0^2}\right)\right]\mathrm{e}^{-i\sigma/2}\left(1-\mathrm{e}^{-2i\,\sigma}\right)^{-1/2}\end{aligned} \tag{4.4.159}$$

Simplifiquemos términos. Por un lado, las dos últimas exponenciales se pueden unir como:

$$\mathrm{e}^{-i\sigma/2}\left(1-\mathrm{e}^{-2i\,\sigma}\right)^{-1/2} = \left[\mathrm{e}^{i\sigma}\left(1-\mathrm{e}^{-2i\,\sigma}\right)\right]^{-1/2} \tag{4.4.160}$$

$$= \left(\mathrm{e}^{i\sigma}-\mathrm{e}^{-i\,\sigma}\right)^{-1/2} \tag{4.4.161}$$

$$= (2i\ \mathrm{sen}\,\sigma)^{-1/2} \tag{4.4.162}$$

Por otro lado, la primera exponencial de (4.4.159) se puede separar como el producto:

$$\begin{aligned}&\exp\left[\frac{2qq'}{\rho(t)\rho_0\hbar}\frac{\mathrm{e}^{-i\sigma}}{1-\mathrm{e}^{-2i\,\sigma}}\right]\exp\left[-\left(\frac{q^2}{\hbar\rho^2(t)}+\frac{q'^2}{\hbar\rho_0^2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-2i\,\sigma}}{1-\mathrm{e}^{-2i\,\sigma}}\right]\\ &=\exp\left[\frac{2qq'}{\rho(t)\rho_0\hbar}\frac{1}{\mathrm{e}^{i\sigma}-\mathrm{e}^{-i\,\sigma}}\right]\exp\left[-\left(\frac{q^2}{\hbar\rho^2(t)}+\frac{q'^2}{\hbar\rho_0^2}\right)\frac{1}{\mathrm{e}^{2i\,\sigma}-1}\right]\end{aligned} \tag{4.4.163}$$

$$=\exp\left[\frac{qq'}{\rho(t)\rho_0\hbar}\frac{-i}{\mathrm{sen}\,\sigma}\right]\exp\left[-\left(\frac{q^2}{\hbar\rho^2(t)}+\frac{q'^2}{\hbar\rho_0^2}\right)\frac{1}{\mathrm{e}^{2i\,\sigma}-1}\right] \tag{4.4.164}$$

Finalmente, juntando estos cálculos y organizando términos en (4.4.159), la expresión de los elementos de matriz del operador unitario de evolución $U_{qq'}(t,t_0)$ es:

$$\begin{aligned} U_{q,q'}(t,t_0) =&\exp\left\{\left[\frac{1}{2\hbar}\left(\frac{i\,\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\frac{1}{\rho^2(t)}\right)-\frac{1}{\hbar\rho^2(t)(\exp(2i\sigma)-1)}\right]q^2\right\}\\ &\exp\left\{\left[-\frac{1}{2\hbar}\left(\frac{i\,\dot{\rho}_0}{\rho_0}\frac{1}{\rho_0^2}\right)-\frac{1}{\hbar\rho_0^2(\exp(2i\sigma)-1)}\right]q'^2\right\}\\ &\exp\left[-\frac{1}{2}\log\left(\rho(t)\rho_0\right)\right]\frac{1}{\sqrt{\pi\,\hbar}}\frac{1}{2i\,\mathrm{sen}\,\sigma}\\ &\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{qq'}{\rho(t)\rho_0}\frac{1}{\mathrm{sen}\,\sigma}\right] \end{aligned} \tag{4.4.165}$$

donde $\sigma \equiv \displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\rho^2(s)}$.

4.4.3. Comprobación

Ahora que se ha obtenido una expresión cerrada de los elementos de matriz del operador unitario de evolución, convendría comprobar si cumple con la ecuación de Schrödinger. Tomando la expresión (4.3.2), podemos realizar la siguiente transformación, usando (4.4.1):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}(t)|\Psi(t)\rangle \tag{4.4.166}$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,t_0)|\Psi(t_0)\rangle = \hat{\mathcal{H}}(t)\hat{U}(t,t_0)|\Psi(t_0)\rangle \tag{4.4.167}$$

Como la ecuación se cumple para todo estado $|\Psi(t)\rangle$, se debe cumplir también para el propio operador, con lo cual podemos eliminar los vectores $|\Psi(t_0)\rangle$, quedando:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,t_0) = \hat{\mathcal{H}}(t)\hat{U}(t,t_0) \tag{4.4.168}$$

que es la ecuación de Schrödinger en su forma en función del operador unitario de evolución. Multiplicando por $\langle q|$ y $|q'\rangle$ en ambos lados:

$$\langle q|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle = \langle q|\hat{\mathcal{H}}(t)\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle \tag{4.4.169}$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle q|\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle = \langle q|\hat{\mathcal{H}}(t)\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle \tag{4.4.170}$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_{qq'}(t,t_0) = \langle q|\hat{\mathcal{H}}(t)\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle \tag{4.4.171}$$

Queremos expresar el lado derecho en función de $U_{qq'}$. Se tiene que:

$$\langle q|\hat{\mathcal{H}}(t)\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle = \langle q|\frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{p}}^2+\Omega^2\hat{\mathrm{q}}^2\right)\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle \tag{4.4.172}$$

$$= \langle q|\frac{1}{2}\hat{\mathrm{p}}^2\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle + \langle q|\frac{1}{2}\Omega^2\hat{\mathrm{q}}^2\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle \tag{4.4.173}$$

El segundo término se puede desarrollar como:

$$\langle q|\frac{1}{2}\Omega^2\hat{\mathrm{q}}^2\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle = \frac{\Omega^2}{2}\langle q|\hat{\mathrm{q}}^2\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle \tag{4.4.174}$$

$$= \frac{\Omega^2}{2}q^2\langle q|\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle \tag{4.4.175}$$

$$= \frac{\Omega^2}{2}q^2U_{qq'}(t,t_0) \tag{4.4.176}$$

donde se ha aplicado que, al ser $|q\rangle$ autoestado de $\hat{\mathrm{q}}$, $\langle q|\hat{\mathrm{q}}^2 = q^2\langle q|$.

El otro término, con el operador momento cuadrado $\hat{\mathrm{p}}^2$, sería:

$$\langle q|\frac{1}{2}\hat{\mathrm{p}}^2\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tilde{q}\frac{1}{2}\langle q|\hat{\mathrm{p}}^2|\tilde{q}\rangle\langle\tilde{q}|\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle \tag{4.4.177}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tilde{q}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}p'\frac{1}{2}\langle q|\hat{\mathrm{p}}^2|p'\rangle\langle p'|\tilde{q}\rangle\langle\tilde{q}|\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle \tag{4.4.178}$$

Aquí hemos introducido dos relaciones de cierre, que convierten el último término en $U_{qq'}(t,t_0)$, y que nos permite operar $\hat{\mathrm{p}}^2$ ya que $|p'\rangle$ son autoestados de este operador:

$$\langle q|\frac{1}{2}\hat{\mathrm{p}}^2\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tilde{q}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tilde{q}\mathrm{d}p'\frac{1}{2}p'^2\langle q|p'\rangle\langle p'|\tilde{q}\rangle U_{\tilde{q}q'}(t,t_0) \tag{4.4.179}$$

Recordando las expresiones de $\langle q|p'\rangle$ y $\langle p'|\tilde{q}\rangle$ (4.4.136), tenemos que:

$$\langle q|\frac{1}{2}\hat{\mathrm{p}}^2\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tilde{q}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tilde{q}\mathrm{d}p'\frac{1}{2}p'^2\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p'(q-\tilde{q})\right]U_{\tilde{q}q'}(t,t_0) \tag{4.4.180}$$

Pero recordando la expresión de la delta de Dirac (4.4.138), se puede comprobar que la derivada segunda respecto de q, por $-\hbar^2$, es:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial q^2}\delta(q,\tilde{q}) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}p'p'^2\exp\left[\frac{i}{\hbar}p'(q-\tilde{q})\right] \tag{4.4.181}$$

y por tanto, sustituyendo:

$$\langle q|\frac{1}{2}\hat{\mathrm{p}}^2\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tilde{q}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tilde{q}\frac{1}{2}(-\hbar^2)\frac{\partial^2}{\partial q^2}\delta(q,\tilde{q})U_{\tilde{q}q'}(t,t_0) \tag{4.4.182}$$

$$= \frac{-\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tilde{q}U_{\tilde{q}q'}(t,t_0)\delta(q,\tilde{q}) \tag{4.4.183}$$

Por la paridad de la delta de dirac, se cumple que $\delta(x) = \delta(-x)$. En particular, $\delta(q,\tilde{q}) = \delta(\tilde{q},q)$. Haciendo este cambio, podemos eliminar la integral y la variable $\tilde{q}$ aplicando la definición de la delta, quedando:

$$\langle q|\frac{1}{2}\hat{\mathrm{p}}^2\hat{U}(t,t_0)|q'\rangle = \frac{-\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}U_{qq'}(t,t_0) \tag{4.4.184}$$

Sustituyendo estos dos resultados (4.4.176) y (4.4.184) en (4.4.173), finalmente quedaría:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_{qq'}(t,t_0) = \frac{\Omega^2(t)}{2}q^2U_{qq'}(t,t_0) - \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}U_{qq'}(t,t_0) \tag{4.4.185}$$

Solo faltaría, por un lado, derivar dos veces con respecto de la posición q, y por otro lado, derivar con respecto del tiempo. Entonces, aplicando que $\rho(t)$ es solución de la ecuación E-P (3.2.1), simplificar y ver la igualdad se cumple. El cálculo es sencillo y directo, si bien tedioso y largo. Se ha considerado que su desarrollo no aporta nada más allá de todo lo que se ha mostrado en este trabajo hasta el momento. Sin más que afirmar que el operador unitario de evolución $U_{qq'}$ cumple la ecuación de Schrödinger, y que por tanto este resultado es totalmente válido, este estudio se da por concluido.

5. Conclusiones

5.1. Resultados y discusión

Se ha completado exitosamente un estudio detallado del sistema oscilador armónico dependiente del tiempo, tanto en mecánica clásica con el uso de la ecuación Ermakov-Pinney, como su equivalente en mecánica cuántica, en términos de operadores de evolución. Se ha conseguido obtener una expresión del operador unitario de evolución, el cual describe completamente la evolución temporal de cualquier estado dentro del sistema del oscilador armónico dependiente del tiempo. Se ha comprobado cómo el uso de la ecuación auxiliar Ermakov-Pinney y sus funciones solución $\rho(t)$ son una gran ayuda a la hora de resolver la ecuación del *TDHO*. La conexión entre las soluciones de la ecuación E-P y las del *TDHO* es clave a la hora de obtener el operador unitario de evolución del sistema. El hecho de que las funciones $\rho(t)$ sean definidas positivas permite que se puedan introducir la transformación $\hat{T}_\rho$ sin problemas en nuestros cálculos. Además, el uso del invariante Ermakov-Lewis resulta fundamental para simplificar la resolución de la ecuación de Schrödinger, pues se da el caso de que, bajo la transformación $\hat{T}_\rho$, nos enfrentamos al hamiltoniano del oscilador armónico independiente del tiempo con frecuencia unidad, cuyos autovalores son bien conocidos.

Para concluir este trabajo, se va a proponer un caso particular de oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo. Haciendo uso del operador unitario de evolución que hemos calculado, vamos a ver como se comporta este sistema para un estado arbitrario. Consideremos que nuestro estado inicial, $|\Psi(q', t_0)\rangle$, está caracterizado por una función de onda con forma gaussiana:

$$\Psi(q', t_0) = \left(\frac{2}{\pi\, a^2}\right)^{1/4} \exp\left(-x^2/a^2\right) \tag{5.1.1}$$

Tomemos el caso de una frecuencia exponencial, $\Omega = \mathrm{e}^t$. La ecuación del TDHO (3.1.4) sería:

$$\ddot{u}(t) + \mathrm{e}^{2t} u(t) = 0 \tag{5.1.2}$$

Como puede comprobarse, la solución de esta ecuación diferencial es:

$$u(t) = c_1 J_0\left(\mathrm{e}^t\right) + 2c_2 Y_0\left(\mathrm{e}^t\right) \tag{5.1.3}$$

donde $J_0(x)$ y $Y_0(x)$ son las funciones de Bessel de primer y segundo orden [25], y $c1$ y $c2$ constantes. Tomando cada solución por separado:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= c_1 J_0\left(\mathrm{e}^t\right) \\ u_2(t) &= c_2 Y_0\left(\mathrm{e}^t\right) \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

podemos formar la siguiente función $\rho(t)$ solución de la ecuación E-P (3.2.1), sustituyendo en (3.2.2):

$$\rho(t) = \sqrt{c_1^2 J_0^2\left(\mathrm{e}^t\right) - \frac{\pi^2}{4} c_2^2 Y_0^2\left(\mathrm{e}^t\right)} \tag{5.1.5}$$

donde se ha tomado que $A = 1$, $B = -\pi^2/16$ y $C = 0$. En efecto, podemos comprobar que la relación $C^2 - AB = 1/W^2$ se cumpla, con W el wronskiano de $u_1(t)$ y $u_2(t)$. Por un lado,

$$C^2 - AB = \frac{\pi^2}{16} \tag{5.1.6}$$

Por otro lado, el wronskiano es:

$$W = u_1(t)\dot{u}_2(t) - u_2(t)\dot{u}_1(t) = \frac{4}{\pi} \tag{5.1.7}$$

y por tanto:

$$\frac{1}{W^2} = \frac{\pi^2}{16} \tag{5.1.8}$$

viéndose así que son iguales, y por tanto estas constantes están bien elegidas. Ahora, introduciríamos la función $\rho(t)$ dentro de $U_{qq'}(t, t_0)$:

$$\begin{aligned} U_{q,q'}(t,t_0) = \exp & \left\{ \left[\frac{i\dot{\sqrt{c_1^2 J_0^2(\mathrm{e}^t) - \frac{\pi^2}{4} c_2^2 Y_0^2(\mathrm{e}^t)}}}{2\hbar\sqrt{c_1^2 J_0^2(\mathrm{e}^t) - \frac{\pi^2}{4} c_2^2 Y_0^2(\mathrm{e}^t)}} \frac{1}{\left(\sqrt{c_1^2 J_0^2(\mathrm{e}^t) - \frac{\pi^2}{4} c_2^2 Y_0^2(\mathrm{e}^t)}\right)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\hbar\left(\sqrt{c_1^2 J_0^2(\mathrm{e}^t) - \frac{\pi^2}{4} c_2^2 Y_0^2(\mathrm{e}^t)}\right)^2 (\exp(2i\sigma) - 1)} \right] q^2 \right\} \\ & \exp\left\{ \left[-\frac{1}{2\hbar}\left(\frac{i\dot{\rho}_0}{\rho_0}\frac{1}{\rho_0^2}\right) - \frac{1}{\hbar\rho_0^2(\exp(2i\sigma)-1)} \right] q^2 \right\} \\ & \exp\left[-\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{c_1^2 J_0^2(\mathrm{e}^t) - \frac{\pi^2}{4} c_2^2 Y_0^2(\mathrm{e}^t)\rho_0} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} \frac{1}{2i \operatorname{sen}\sigma} \\ & \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \frac{qq'}{\sqrt{c_1^2 J_0^2(\mathrm{e}^t) - \frac{\pi^2}{4} c_2^2 Y_0^2(\mathrm{e}^t)\rho_0}} \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma} \right] \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

Hemos obtenido así la expresión del operador unitario de evolución para este sistema de ejemplo. Ahora, se podría ir más allá. Recordando (4.4.99), el estado en cualquier instante de tiempo vendría dado por la integral:

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}q' U_{q,q'}(t,t_0)\Psi(q', t_0) \tag{5.1.10}$$

con $\Psi(q', t_0)$ la función de onda en el instante inicial (5.1.1). Resolver esta integral nos daría una expresión del estado $\psi(t)$ en función de la posición q, y podríamos representar valores como la varianza de la posición o el momento en el tiempo, los cuales proporcionan información que puede ser de gran utilidad en el estudio de estos sistemas.

5.2. Futuras líneas de trabajo

Este trabajo se podría continuar de muchas maneras. Se podría hacer un análisis similar del oscilador armónico dependiente del tiempo haciendo uso de los operadores de creación y aniquilación, así obteniendo el operador unitario de evolución en función de estos. Gran parte de la bibliografía ya mencionada trabaja con estos, en lugar de $\hat{q}$ y $\hat{p}$. Otro interesante estudio sería el de los estados coherentes del oscilador, cuya evolución puede ser analizada directamente a partir de los elementos de matriz del operador de evolución que se ha calculado. También se podrían haber estudiado otros ejemplos, y haber obtenido sus funciones de onda mediante la integral (5.1.10), para más tarde representar valores como la incertidumbre en la posición o el momento, igual que se hace en el artículo [9] (figura 3).

Este estudio, como ya se ha mencionado anteriormente, tiene aplicaciones dentro de teoría cuántica de campos y gravedad cuántica, por lo que también se podrían seguir múltiples líneas de investigación dentro de esas y otras ramas de física fundamental.

Referencias

[1] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloe. *Quantum Mechanics, Volume 1*, volume 1. 1986.

[2] Jorge José and Eugene Saletan. *Classical dynamics: a contemporary approach*. American Association of Physics Teachers, 1998.

[3] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Mechanics third edition: Volume 1 of course of theoretical physics*. 1976.

[4] J. J. Sakurai and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2 edition, 2017.

[5] Carlos Sánchez del Río. *Física cuántica*. Comercial Grupo ANAYA, SA, 2017.

[6] V Ermakov. Second order equations: Conditions of complete integrability. *Univ. Isz. Kiev Ser. III*, 9(1), 1880.

[7] Edmund Pinney. The nonlinear differential equation y+ p (x) y+ cy- 3= 0. In *Proc. Amer. Math. Soc*, volume 1, pages 681–681, 1950.

[8] Peter G.L. Leach and K. Andriopoulos. The ermakov equation: a commentary. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, pages 146–157, 2008.

[9] Daniel Gómez Vergel and Eduardo J.S. Villaseñor. The time-dependent quantum harmonic oscillator revisited: Applications to quantum field theory. *Annals of Physics*, 324(6):1360–1385, 2009.

[10] M Fernández Guasti and H Moya-Cessa. Solution of the schrödinger equation for time-dependent 1d harmonic oscillators using the orthogonal functions invariant. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(8):2069, 2003.

[11] Célia Dantas, IA Pedrosa, and B. Baseia. Harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency and a perturbative potential. *Physical review. A*, 45:1320–1324, 03 1992.

[12] Daniel Martínez-Tibaduiza, Luis Pires, and Carlos Farina. Time-dependent quantum harmonic oscillator: a continuous route from adiabatic to sudden changes. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 54(20):205401, 2021.

[13] Gaetano Fiore. The time-dependent harmonic oscillator revisited, 2022.

[14] Daniel Gómez Vergel. Classical and quantum formulations of s1xs2 and s3 gowdy models coupled with matter, 2009.

[15] H. Ralph Lewis Jr. Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type hamiltonians. *Physical Review Letters*, 18(13):510, 1967.

[16] H. R. Lewis. Class of exact invariants for classical and quantum time-dependent harmonic oscillators. *Journal of Mathematical Physics*, 9(11):1976–1986, 1968.

[17] Jr. Lewis, H. R. and W. B. Riesenfeld. An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field. *Journal of Mathematical Physics*, 10(8):1458–1473, 11 2003.

[18] Pedro B. Espinoza. Ermakov-lewis dynamic invariants with some applications, 2000.

[19] Jeong-Young Ji, Jae Kwan Kim, and Sang Pyo Kim. Heisenberg-picture approach to the exact quantum motion of a time-dependent harmonic oscillator. *Phys. Rev. A*, 51:4268–4271, May 1995.

[20] Hyeong-Chan Kim, Min-Ho Lee, Jeong-Young Ji, and Jae Kwan Kim. Heisenberg-picture approach to the exact quantum motion of a time-dependent forced harmonic oscillator. *Phys. Rev. A*, 53:3767–3772, Jun 1996.

[21] Christopher Gerry and Peter Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2004.

[22] Sophus Lie. *Vorlesungen über differentialgleichungen: mit bekannten infinitesimalen transformationen*. BG Teubner, 1891.

[23] V.K Dobrev, H.-D Doebner, and R Twarock. Quantum mechanics with difference operators. *Reports on Mathematical Physics*, 50(3):409–431, 2002.

[24] E.D. Rainville. *Special Functions, Chelsea Publ.* p. 198, 1971.

[25] Milton Abramowitz, Irene A Stegun, et al. *Handbook of mathematical functions*, volume 55. Dover New York, 1964.