



**Universidad
Europea** VALENCIA

GRADO EN FÍSICA

**Revisión del Mecanismo de Page and
Wooters para el Estudio del Tiempo en la
Física Cuántica**

Presentado por:

DANIEL RODRÍGUEZ GARCÍA

Dirigido por:

Dr. VICTOR ILISIE CHIVICI

CURSO ACADÉMICO 2024-2025

*Dedicado a todas las personas que me quieren y apoyan todos los días y al profesor
que hizo que me enamorase de la física, pero sobre todo dedicado a ti.*

Mamá, te quiero ☺

Índice

1. Introducción	1
1.1. Resumen	1
1.2. ODS	2
1.3. Motivación y Objetivos	2
1.4. Metodología	3
2. Fundamentos y Desarrollo Teórico	4
2.1. Contexto Histórico del Problema	4
2.2. Mecanismo de Page and Wothers	6
2.3. Inciso Teoría de Grupos	7
2.3.1. Grupos de Lie	8
2.4. Demostraciones Iniciales	11
2.5. Reloj Clásico para un Sistema Cuántico	24
2.6. Reloj y Sistema Clásicos	29
3. Conclusión	33
3.1. Conclusiones e Implicaciones Teóricas	34
3.2. Criticismo y Lineas de Investigación	35
3.3. Reflexión Final	36

1. Introducción

1.1. Resumen

Este trabajo tiene como objetivo principal el estudio del tiempo en la física cuántica a través del mecanismo de Page y Woiters, utilizando para ello principalmente el enfoque utilizado en el paper Foti et al., 2021. A lo largo del documento trataré de reproducir los resultados obtenidos por el mismo así como ampliar sus contenidos mediante otros artículos, documentos, libros, etc. con el objetivo de añadir valor al trabajo inicial realizado por Alessandro Coppo, et al. En el artículo los autores consiguen, no solo demostrar que *no existen un tiempo cuántico y clásico diferentes entre si*, sino que además este *se puede entender como el fruto del entrelazamiento entre cualquier sistema en evolución temporal y un sistema que utilizamos como reloj*.

Palabras clave: Tiempo, Page and Woiters, GCS, grupos de Lie, álgebra de Lie, bases de Cartan.

1.2. ODS

Toda forma de conocimiento es útil, de una manera o de otra. Si bien es posible argumentar que los trabajos de investigación puramente teóricos no suelen tener un efecto inmediato en la sociedad y por lo tanto, no tendrían un vínculo directo con los ODS, las reacciones que producen estas investigaciones al largo plazo son lo que hace que estas valgan la pena con creces.

Así, mientras que un artículo teórico no inventará la siguiente revolución tecnológica, los intentos de probar o desmentir esta teoría sí implican siempre **avances tecnológicos innovadores (ODS 9 Industria, Innovación e Infraestructura)**.

Por otra parte, de manera algo más directa, las investigaciones teóricas de este estilo contribuyen a avanzar en el conocimiento científico, siempre a través del pensamiento crítico y favoreciendo una mejora de la calidad educativa en la rama del saber que se está estudiando (**ODS 4 Educación de Calidad**).

1.3. Motivación y Objetivos

La motivación principal que mueve la realización de este trabajo bibliográfico es, principalmente, la de servirme como iniciación a la investigación. Uno de los trabajos que un físico acabará llevando a cabo durante sus primeros años investigando, será el de la reproducción y comprensión de resultados escritos en artículos, documentos y libros. Por ello mis principales objetivos son:

- El estudio del dilema alrededor concepto físico del tiempo, así como el papel del mismo en la mecánica cuántica.
- Ampliar y profundizar mis conocimientos matemáticos en diferentes ámbitos como la Teoría de grupos, álgebras de Lie, bases de Cartan, etc.

- Ser capaz de comprender, replicar y explicar los diferentes procesos llevados a cabo en el artículo científico seleccionado, ampliando y explicitando los cálculos y derivaciones hechos en el mismo.

1.4. Metodología

Sobre la metodología de trabajo que he seguido durante la realización de este trabajo de investigación se podría decir que está basado en los diferentes pasos que se suelen seguir para conseguir la resolución de problemas, ya que mi experiencia en la realización de este trabajo se ha basado un poco en eso, ir resolviendo las dudas que me han ido surgiendo para luego poder reproducir correctamente todos los cálculos.

En primer lugar, trabajé el texto realizando apuntes y anotaciones acerca de la información más relevante del documento, apuntando fórmulas importantes y buscando información en otros artículos o libros más elementales, con los cuales ampliar la información obtenida en el artículo.

Seguidamente, una vez comprendidos y ampliados los conceptos que creí suficientes en un inicio, procedí a la demostración de las fórmulas del artículo por mi propia cuenta y a mano. Matizo el, en un inicio, debido a que hubo que hacer múltiples ampliaciones posteriores debido a nuevos conceptos desconocidos que aparecieron durante el desarrollo de las diferentes fórmulas.

Por último, tras tener todas las demostraciones solo quedaba plasmar toda la información recopilada en el trabajo tratando de explicar de la mejor manera cada paso concreto de la demostración. Con ello no quiero decir que el trabajo original estuviera mal explicado, si no que, al tratarse de un tema tan complejo y al relatar un mecanismo que trata de ser lo más general posible (tal y como veremos más adelante) en un número de páginas finito, es natural que alguno de los pasos que se siguen en el mismo resulten no triviales.

2. Fundamentos y Desarrollo Teórico

2.1. Contexto Histórico del Problema

Generalmente cuando uno piensa en una magnitud física, normalmente la entiende como una característica medible de un sistema, a la cual se le puede asignar un valor con unas unidades determinadas. La posición, la carga, la masa o la temperatura, son algunas de las principales y todas ellas comparten una característica en común, todas ellas tienen un papel más o menos definido para toda la física. Incluso en la física cuántica, pese al entrelazamiento o al principio de incertidumbre, la posición de una partícula, sigue definiéndose como la localización que se da a la misma respecto a un sistema de referencia dado. Lo mismo se podría decir también de otras magnitudes como la energía, la cual, si bien puede tener diferentes fórmulas en función del tipo que se calcule, esta siempre se podrá reconocer como la capacidad de un objeto de realizar un trabajo o de provocar un cambio. Sin embargo, esto no ocurre cuando se habla del tiempo, cuya interpretación ha ido variando a lo largo de los años, sucediéndose múltiples interpretaciones acerca del papel que juega esta variable en el universo.

(1687) Desde el **punto de vista clásico** o **newtoniano** se entiende el tiempo como una variable universal para todos los observadores de manera que, mientras que todos los observadores sincronizasen sus relojes de manera apropiada, todos observarían ocurrir los eventos en los mismos tiempos exactos (Taylor, 2005). Sin embargo, como ya sabemos, posteriormente se conoció que esta visión era incompleta y solo válida para velocidades mucho más pequeñas que la de la luz.

(1905) No sería hasta mucho después cuando **Albert Einstein** publicaría sus teorías de la *relatividad especial y general*, donde se daría una definición más precisa de tiempo. En ella se postula la velocidad de la luz en el vacío como invariante

independientemente del sistema de referencia, a diferencia de las distancias y del tiempo, los cuales se contraen o dilatan en función de velocidades relativas entre los sistemas de referencia o incluso a raíz de la presencia de campos gravitatorios. Además, define el tiempo como una dimensión más, obteniendo una variedad cuatridimensional conocida como espacio-tiempo de Minkowsky.

(1925-1927) Posteriormente, con la aparición de la mecánica cuántica formulada por Heisenberg, Schrödinger y compañía, se formularía una nueva forma de entender el tiempo. En esta nueva rama de la física, el tiempo no es un observable como la posición o la energía, sino que solamente se encontraba presente como forma de hacer evolucionar un sistema en el propio tiempo o al menos eso se creía en un principio. Además, en esta teoría también se introducen conceptos novedosos como el colapso de la función de onda al realizar una medición en el sistema cuántico de manera instantánea.

(Actualidad del problema) Mientras que la relatividad nos brinda un marco consistente y cuya compatibilidad con la mecánica clásica Newtoniana es absoluta, la cuántica nos habla del tiempo como una magnitud externa a la teoría y no reconocible como observable. Las grandes discrepancias entre ambas teorías presenta una gran incógnita a la hora de valorar una de las magnitudes más importantes en nuestra vida cotidiana, que es si es posible la existencia de dos versiones diferentes del tiempo. Para responder a esta pregunta utilizaré el mecanismo de Page y Wothers (Foti et al., 2021), el cual ofrece una visión diferente del tiempo desde el punto de vista de la mecánica cuántica, negando la existencia de estas dos versiones y afirmando que el mismo tiempo es consecuencia del entrelazamiento cuántico.

2.2. Mecanismo de Page and Wothers

Las principales discusiones sobre la existencia o no de diferentes versiones del tiempo surgen a partir de la separación o diferenciación entre sistemas que se comportan de manera cuántica con aquellos que se comportan de manera clásica, como si estos formasen parte de realidades completamente distintas y desconectadas la una de la otra. Esto no ocurre en teorías como la de la relatividad, ya que el límite entre relatividad general y la mecánica clásica está muy bien determinado (velocidades mucho menores a la de la luz y presencia de campos gravitatorios estándar), cosa que no siempre ocurre en la mecánica cuántica. Por ello, si nuestro objetivo es conseguir demostrar que la magnitud temporal es la misma para ambos regímenes de la física deberemos de utilizar algún tipo de estados cuánticos que sobrevivan a lo que conoceremos como límite clásico, es decir, aproximación a grandes N o lo que es lo mismo, aproximar nuestro sistema cuántico a un sistema macroscópico. Para ello utilizaremos los conocidos como *CGS* o *Estados Coherentes Generalizados* en castellano, sin embargo estos los explicaremos más adelante. Finalmente al aplicar el límite clásico sobre el sistema que definiremos a continuación deberemos ser capaces de obtener tanto las ecuaciones de Schrödinger para un sistema cuántico, como las ecuaciones del movimiento de Hamilton para ese mismo cuando tiende al límite.

Sin embargo, antes de adentrarnos, es necesario presentar **el sistema** Ψ en cuestión. Este está compuesto por dos subsistemas, a priori cuánticos, no interaccionantes, pero que se encuentran en un estado de entrelazamiento. Uno de ellos se comportará como nuestro reloj C , mientras que el otro será el sistema que evolucione en el tiempo, conocido como Γ .

$$\Psi = C + \Gamma. \tag{1}$$

También cabe mencionar que, bajo el mecanismo de Page and Wothers (PaW), el tiempo t se conocerá a partir del estado en el que se encuentre el sistema reloj,

ademas de partir de cuatro premisas iniciales.

1. El reloj no interacciona con el sistema al que proporciona este tiempo t .
2. Ambos sistemas están entrelazados.
3. Ambos sistemas son autoestados del Hamiltoniano que describe el espacio completo y su autovalor será igual a cero (Giovannetti et al., 2015).
4. El sistema Ψ es un sistema aislado.

2.3. Inciso Teoría de Grupos

Antes de comenzar con la explicación y recreación de los propios desarrollos realizados en adelante, es necesario tener claros los siguientes conceptos de grupo, subgrupo y las diferentes clasificaciones que hay de los mismos.

- **Definición:** Conjunto G que cuenta con una operación (\cdot) gracias a la cual se cumplen los siguientes axiomas sobre el propio conjunto G :
 - **Cerrados:** $\forall g, f \in G$ se cumple que; $g \cdot f = h, h \in G$.
 - **Asociatividad:** $\forall g, f, h \in G$ se cumple que; $(g \cdot f) \cdot h = g \cdot (f \cdot h), h \in G$
 - **Identidad:** \exists un elemento del grupo $I \in G$ tal que $g \cdot I = I \cdot g = g, \forall g \in G$.
 - **Inversa:** $\forall g \in G \exists$ un elemento $g^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = I$.
- **Clasificación:** Es posible clasificar o diferenciar grupos en función características que, si bien no son definitorias de todos los grupos, si son bastante comunes entre ellos:
 - **Abelianos:** Aquellos que $\forall g, f \in G$ cumplen que; $g \cdot f = f \cdot g$.

- **Finitos:** Aquellos cuyos componentes pertenecientes al grupo G son finitos.
 - **Discretos o Continuos:** Los grupos serán generalmente discretos y serán continuos solo si contienen una topología.
- Subgrupo: H será un subgrupo de G si este conforma un subconjunto del grupo G , el cual cumple por si solo las características necesarias para conformar un grupo.

2.3.1. Grupos de Lie

Los grupos de Lie G se definen como aquellos que conforman una variedad diferenciable (C^∞) y continua, en los que las operaciones multiplicación $\alpha : G \times G \rightarrow G$ e inversión $\beta : G \rightarrow G$ son mapeos continuos respecto a la topología, convirtiéndolo así en un grupo topológico. Por otra parte, también es importante mencionar que, al igual que la mayoría de grupos, estos tienen una forma matricial siendo uno de los más importantes el Grupo General Lineal $GL(n, \mathbb{R})$ (para números reales) $GL(n, \mathbb{C})$ (para números complejos). Este grupo está conformado por el conjunto de matrices invertibles $n \times n$, el cual es tanto continuo como diferenciable. A su vez al ser este un grupo muy extenso, abarca múltiples subgrupos, los cuales, en consecuencia también son Grupos de Lie (Teorema del subgrupo Cerrado). Todos ellos en conjunto son conocidos como el grupo Matricial de Lie.

Geoméricamente un Álgebra de Lie es la linealización del grupo cerca del origen. Al tratar con grupos en su forma matricial es posible calcular las linealizaciones de manera explícita partiendo de una matriz M perteneciente al grupo y cuyos n parámetros son reales. Así como ya hemos mencionado anteriormente expandiremos la matriz cerca de la identidad de manera que:

$$M = I + iL.$$

Siendo L las matrices obtenidas a partir de la matriz original de tal manera que se tratarán de matrices hermíticas imaginarias. Además, esta matriz L podrá deberá ser descompuesta en sus bases $L_1, L_2 \dots L_n$, las cuales se definen como las bases generadoras infinitesimales del grupo de Lie, para así definir el vector dimensional del espacio de matrices L que cumplen sus mismas condiciones.

$$L = \sum_{i=1}^n \theta_i L_i.$$

Entonces encontramos que, dos elementos del grupo M y M' , con sus respectivas expansiones $M = I + iL, M' = I + iL'$, conmutarán si $[L, L'] = 0$, mientras que a su vez para comprobar eso sería necesario el calculo de:

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^d c_{ijk} L_k.$$

Definiendo de esta manera el álgebra del grupo de Lie, es decir, vector del espacio V de combinaciones lineales de generadores L_i con una operación lineal $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$, donde a c_{ijk} se las conocen como las constantes de estructura y se calculan a partir de de los generadores del grupo (L_i).

Formalmente se define el espacio vectorial V de un cierto campo o grupo M (generalmente tomándose los reales de la clase), en conjunto con una operación binaria $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ o braket de Lie el cual debe de satisfacer:

1. **Bilinealidad:** $\forall a, b \in F$ y $\forall x, y, z \in V$ se cumple que:

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$$

$$[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y]$$

2. **Antisimetría:** $[x, y] = -[y, x]$ para todo $x, y \in V$.

3. Se cumple la **Identidad de Jacobi** para todo $x, y, z \in V$

$$[x, [y, z]] + [x, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$$

(Ejemplo del Álgebra $su(2)$): El grupo $SU(2)$ está compuesto por matrices unitarias ($UU^\dagger = U^\dagger U = I$) 2×2 cuyo determinante es igual a 1. De esta manera para obtener su álgebra deberemos de seguir los pasos marcados anteriormente. En primer lugar llevaremos a cabo la expansión a primer orden $U = I + iL$, para así posteriormente comenzar con el cálculo de las matrices L , que, de manera general, podrían definirse de la siguiente forma:

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Seguidamente calcularemos los coeficientes ($a, b, c, d \in \mathbf{C}$) en función de las condiciones impuestas por el problema. Por una parte sabemos que estas matrices tienen que ser unitarias, por lo tanto:

$$UU^\dagger = (I + iL) \cdot (I + iL)^\dagger = I.$$

Para que esto se cumpla $L=L^\dagger$. Seguidamente utilizaremos la segunda condición para que una matriz se considere parte del grupo a través de:

$$|U| \approx |I + iL| = \begin{vmatrix} 1 + a & b \\ c & 1 + d \end{vmatrix} = (1 + a)(1 + d) - bc = 1 + d + a + ad - bc.$$

Que a primer orden queda como:

$$|U| \approx 1 + a + d = 1.$$

De esta manera queda que $a = -d$ y por lo tanto podemos describir la matriz L

como una matriz sin traza quedando como:

$$L = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 + it_3 \\ t_2 - it_3 & -t_1 \end{pmatrix}.$$

Así, para cualquier numero real t_1, t_2, t_3 , la matriz será hermítica, sus terminos diagonales son reales e iguales pero de signo contrario, mientras que aquellos que entesen fuera de la diagonal principal serán complejos conjugados entre ellos.

De esta manera el álgebra de Lie su_2 es entonces tridimensional y una posible base natural pura en el espacio vectorial se podría expresar tal que:

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Sus conmutadores quedan como :

$$[T_1, T_2] = iT_3; [T_1, T_3] = iT_2; [T_2, T_3] = iT_1; \quad (3)$$

$$[T_i, T_j] = ij \sum_{k=1}^3 \epsilon_{i,j,k} T_k. \quad (4)$$

2.4. Demostraciones Iniciales

Tras esta descripción básica del sistema global que estudiaremos, así como la explicación de ciertos conceptos que serán muy repetidos a lo largo del trabajo, ahora sí, pasaremos a demostrar la premisa principal del artículo. *No existe tal cosa como tiempo clásico y cuántico, el tiempo es uno solo y es consecuencia del entrelazamiento entre un sistema que actúa como reloj y el sistema a estudiar.*

Para ello, primero definiremos el estado total de nuestro sistema o estado puro como $|\Psi\rangle\rangle$. Este abarca tanto el sistema C como Γ donde la notación de doble braquet hace referencia precisamente a que el espacio de Hilbert del sistema completo es igual

al producto tensorial de los demás espacios, es decir, $\mathcal{H}_* = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_-$. Este puede ser definido en su forma más general tal que:

$$|\Psi\rangle\rangle = \sum_{\gamma\xi} c_{\gamma\xi} |\xi\rangle \otimes |\gamma\rangle, \quad (5)$$

donde $\{\xi\}_C$ y $\{\xi\}_\Gamma$ son bases ortonormales de \mathcal{H}_C y \mathcal{H}_Γ respectivamente, mientras que $c_{\gamma\xi} \in \mathbb{C}$ se tratan de los prefactores del estado y cuyo módulo cuadrado representará la probabilidad del estado de manera que $\sum_{\gamma\xi} |c_{\gamma\xi}|^2 = 1$. Sin embargo, esta sería una forma general de representar un estado cuántico ¹ cosa no demasiado interesante. Más adelante definiremos una versión parametrizada de la misma, utilizando por fin los GCS.

Por otro lado, definiremos el Hamiltoniano del sistema como

$$\hat{H} = \hat{H}_C \otimes \hat{\mathbb{1}}_\Gamma - \hat{\mathbb{1}}_C \otimes \hat{H}_\Gamma, \quad (6)$$

donde \hat{H}_C es el Hamiltoniano del sistema del reloj \hat{H}_Γ es el del sistema estudiado y $\hat{\mathbb{1}}_{C/\Gamma}$ son las respectivas identidades y donde cabe mencionar además que el signo negativo es irrelevante, aparece por notación (Foti et al., 2021).

Recordando la tercera premisa y sabiendo que el estado completo del sistema está compuesto por las bases vistas en la ecuación (5) obtenemos

$$\hat{H}|\Psi\rangle\rangle = 0. \quad (7)$$

Esta resultará una ecuación vital en el desarrollo de la demostración ya que de ella acabaremos obteniendo la expresión final del tiempo.

Como ya he avanzado antes la versión del estado general (5) pese a ser la más general no nos podrá ser de utilidad, ya que está compuesta por estados cuánticos

¹Donde la notación $|\cdot\rangle\rangle$ hace referencia a que es un estado conformado por dos estados pertenecientes a espacios de hilbert diferentes.

comunes, los cuales no cumplen con los requisitos requeridos para sobrevivir al paso del límite cuántico al clásico, a diferencia de los GCS. Estos se diferencian de los estados comunes anteriormente mencionados en que tienen una correspondencia total 1 a 1² con los puntos de una variedad diferenciable, la cual contará con las características requeridas para tratarse de una variedad de espacio-fase clásica.

La primera gran aparición de los **Estados Coherentes Generalizados** es en el ámbito de la óptica cuántica con los estados coherentes de Glauber (Zhang et al., 1990), los cuales aparecían como autoestados de la función de coherencia del campo electromagnético. Glauber los describiría a partir de tres definiciones :

- Definición 1: Los estados coherentes, de momento $|\alpha\rangle$, son autoestados del operador aniquilación del oscilador armónico, es decir que $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, con α un número complejo
- Definición 2: Los estados coherentes pueden ser obtenidos aplicando un operador desplazamiento $D(\alpha)$ (en nuestro caso lo conoceremos como operador diagonal) sobre el estado vacío, o base, del oscilador armónico. $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ y donde el operador desplazamiento queda definido como:

$$D(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}. \quad (8)$$

- Definición 3: Los estados coherentes son estados cuánticos con un principio de incertidumbre de Heisenberg mínimo. $(\Delta p)^2(\Delta q)^2 = (\frac{1}{2})^2$

Con esta primera versión, únicamente válida para sistemas cuyo comportamiento se asemejase a la de un oscilador armónico, se crearon los Estados Coherentes Generalizados. En un principio su generalización intentó realizarse a través de, valga la redundancia, generalizar las definiciones anteriores. No obstante, debido a las dificultades para generalizar alguna de las definiciones, unido al hecho de que la

²He aquí la supervivencia al límite anteriormente mencionada.

diferente forma de generalizarlas daba como resultado valores muy dispares se optó por otro camino de generalización.

En su lugar consideraremos que un estado es coherente cuando puedan ser contruidos de la misma manera que los estados coherentes de Glauber. Partiendo de un Hamiltoniano cualquiera deberemos de identificar tres inputs necesarios para su construcción:

1. El grupo de Lie G con su respectiva álgebra \mathfrak{g} y sus operadores $\{T_i\}$ cerrados bajo las conmutaciones típicas de las álgebras de Lie (para mayor información sobre grupos y álgebras de manera en la sección (2.3)) $[T_i, T_j] = \sum_k c_{ij}^k T_k$. Además también cabría mencionar que de tratarse \mathfrak{g} de un álgebra semi-simple (como es en nuestro caso) entonces el conjunto $\{T_i\}$ convendría transformarlo en un conjunto de Base de Cartan estándar, aunque de nuevo ya nos centraremos en eso más adelante.
2. Caracterización del espacio de Hilbert \mathcal{H} en el cual debe de estar incluido la representación irreducible del grupo G .
3. Definición del elemento o estado de Referencia, esta elección es arbitraria, pero normalmente es elegido el estado con mas peso dentro del espacio, ya que la elección del mismo condiciona sobremanera la construcción de los estados coherentes $|G\rangle$.

Una vez identificados los inputs debemos seguir los siguientes pasos para finalmente obtener nuestros GCS:

1. Encontraremos el subgrupo de máxima estabilidad, es decir el subgrupo de $F \in G$ cuyas componentes no alteran el estado de referencia, añadiéndole como máximo una fase $\hat{f}|G\rangle = e^{-i\phi}|G\rangle$.
2. A partir del mismo generaremos el coset G/F . En este todos los elementos

$g \in G$ tienen una descomposición en función de las componentes de F y de G/F $\hat{g} = \hat{\Omega}\hat{f}; \hat{g} \in G; \hat{f} \in F; \hat{\Omega} \in G/F$.

3. Finalmente con todo esto ya tendríamos nuestros estados coherentes a través de $\hat{\Omega}|G\rangle = |\Omega\rangle$.

Sobre ellos es importante mencionar que están normalizados pero que no ortogonales (Foti et al., 2021). Además de que sus valores esperados se calculan como $\langle \Omega | \hat{O} | \Omega \rangle = O(\Omega)$.

Una vez definida la obtención y forma de los GCS ya podemos volver a la parametrización de $|\Psi\rangle\rangle$ a la cual se llega partiendo de los siguientes parámetros:

1. $\int_{G/F} d(\hat{\Omega}|\Omega\rangle\langle\Omega|) = \hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{H}}$
2. $\chi(\Omega) = e^{i\Lambda(\Omega)} \sqrt{\sum_{\gamma} |f_{\gamma}(\Omega)|^2}$
3. $f_{\gamma}(\Omega) = \sum_{\xi} \langle \Omega | \xi \rangle c_{\gamma\xi}$
4. $|\phi(\Omega)\rangle\rangle = \frac{1}{\chi(\Omega)} \sum_{\gamma} f_{\gamma}(\Omega) |\gamma\rangle$

En primer lugar, a partir de la ec. (5), y multiplicando por la identidad nos queda:

$$|\Psi\rangle\rangle = \int d\mu(\hat{\Omega}) |\Omega\rangle\langle\Omega| \sum_{\gamma} \sum_{\xi} c_{\gamma\xi} |\xi\rangle \otimes |\gamma\rangle,$$

reescribimos para mayor claridad pero aquí podremos sustituir por el parámetro (3.)

$$\int d\mu(\hat{\Omega}) |\Omega\rangle\langle\Omega| \sum_{\gamma} \sum_{\xi} c_{\gamma\xi} |\xi\rangle \otimes |\gamma\rangle = \int d\mu(\hat{\Omega}) |\Omega\rangle\langle\Omega| \sum_{\gamma} f_{\gamma}(\Omega) |\gamma\rangle.$$

Ahora para sustituir la expresión (4.) $\chi(\Omega)$, multiplicaremos y dividiremos entre la misma, quedando

$$\int d\mu(\hat{\Omega}) |\Omega\rangle\langle\Omega| \chi(\Omega) \frac{1}{\chi(\Omega)} \sum_{\gamma} f_{\gamma}(\Omega) |\gamma\rangle = \int d\mu(\hat{\Omega}) |\Omega\rangle\langle\Omega| \chi(\Omega) |\phi(\Omega)\rangle\rangle.$$

Obteniendo finalmente la parametrización deseada

$$|\Psi\rangle\rangle = \int d\mu(\hat{\Omega}) \chi(\Omega) |\Omega\rangle |\phi(\Omega)\rangle. \quad (9)$$

Para una mayor claridad explicamos termino a termino:

1. $d\mu(\Omega)$: Invariante con respecto a los elementos de G_C y asegura un que es un set completo de \mathcal{H}_C , debido a que genera la identidad tal y como antes dijimos solo que ahora nos referimos al sistema del reloj tal que:

$$\int d\mu(\hat{\Omega}) |\Omega\rangle \langle \Omega| = \hat{\mathbb{I}}_C$$

2. $\chi(\Omega)$: Se define tal y como se ha mostrado anteriormente a excepción del factor de fase arbitrario tal que:

$$\chi(\Omega) = e^{i\phi(\Omega)} \sqrt{\sum_{\gamma} |f_{\gamma}(\Omega)|^2} = e^{i\phi(\Omega)} \sqrt{\sum_{\gamma} \sum_{\xi} c_{\gamma\xi} \langle \Omega | \gamma \rangle}$$

3. $|\Omega\rangle$: Es un estado coherente generalizado del Reloj. En nuestro caso es generado a partir del grupo de Lie G_C asociado con su álgebra y por tanto pertenecen al Hamiltoniano H_C donde $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_m,)$ y $\Omega \in \mathbb{C}$ son los puntos dentro de una variedad diferencial \mathcal{M}_C bidimensional con estructura simpléctica donde m es la dimensión de g_C .
4. $|\phi(\Omega)\rangle \in \mathcal{H}_{\Gamma}$: Describe el estado Γ y dependiente de Ω , aunque esa dependencia solo aparecerá si $|\Psi\rangle\rangle$ es un estado entrelazado.

$$|\phi(\Omega)\rangle = \frac{1}{\chi(\Omega)} \sum_{\gamma} f_{\gamma}(\Omega) |\gamma\rangle$$

5. $\chi^2(\Omega)$: Distribución de probabilidad normalizada de la variedad \mathcal{M}_C relacionada con el entrelazamiento de $|\Psi\rangle\rangle$ donde: Si $|\Psi\rangle\rangle$ está entrelazado $\chi^2(\Omega)$ será

una superposición de distribuciones normalizadas $|\sum_{\xi} c_{\gamma\xi} \langle \Omega | \xi \rangle|^2$.

Una vez explicados los diferentes elementos de la parametrización, así como la generación de los estados coherentes generalizados, es necesario realizar un estudio del álgebra del sistema. Ya hemos adelantado que el grupo al que pertenecen estos estados generalizados es al grupo dinámico G , ya que se tratan de estados de un sistema que evoluciona en el tiempo, mientras que su álgebra es un álgebra de Lie g semisimple. Esta puede ser descrita a partir del conmutador de dos de los elementos del álgebra, lo que devuelve una constante de estructura por un tercer elemento del propio álgebra de la siguiente forma.

$$[T_i, T_j] = \sum_k c_{ij}^k T_k \quad (10)$$

No obstante, tal y como se menciona más arriba en la página (14), resulta mucho más conveniente transformar el conjunto anterior con el objetivo de obtener una descomposición de Cartan. Para realizar estas descomposiciones unicamente necesitamos definir, por una parte, los operadores diagonales $\{D_i\}$ y los operadores escalera $\{\hat{R}_m, \hat{R}_{-m}\}$ mientras que por otra, las reglas de conmutación entre los mismos

$$[\hat{D}_i, \hat{D}_j] = 0 \quad (11)$$

$$[\hat{D}_i, \hat{R}_m] = d_{im} \hat{R}_m \quad (12)$$

$$[\hat{R}_m, \hat{R}_{-m}] = \sum_i d_{im} \hat{D}_i \quad (13)$$

$$[\hat{R}_m, \hat{R}_{m'}] = c_{mm'} \hat{R}_{m+m'} \quad (14)$$

Si nos fijamos, es fácil ver que estas reglas de conmutación funcionan de manera parecida al álgebra de un grupo, definiendo la estructura del mismo a través tanto de las constantes de estructura, como de los propios conmutadores. Por lo tanto, será a partir de estas, con las que consigamos definir todo el conjunto de opera-

dores y estados que nos llevarán hasta la demostración de la premisa del artículo, comenzando por el Hamiltoniano y los estados del reloj.

Como ya se ha mencionado al comienzo del paper, si lo que se quiere demostrar es que el tiempo es una magnitud independiente de la magnitud de un sistema³ el “reloj”, o más bien sus estados, deberán de soportar correctamente el límite clásico, que ya concretaremos mejor más adelante. Para ello, definimos los GCS del reloj, así como su Hamiltoniano.

En el paper original el **Hamiltoniano** del reloj es descrito en función únicamente del primer operador diagonal del álgebra \hat{D}_1 de la siguiente manera.

$$\hat{H}_C = \zeta \hat{D}_1 + k \hat{\mathbb{I}}_C, \quad (15)$$

donde k se trata de una constante real arbitraria, ζ^2 puede valer tanto 1 como -1, implicando esto que ζ pueda valer tanto 1 como i respectivamente, mientras que $\hat{\mathbb{I}}_C$ es la identidad $\in \mathcal{H}_C$. Cabe mencionar que, si bien la configuración del Hamiltoniano podría ser otra completamente diferente, esta tiene varias ventajas.

En primer lugar su conmutador consigo mismo así como con otros operadores diagonales siempre serán iguales a cero (fórmula 11). Además el valor de la variable ζ^2 también nos aporta información de lo más valiosa con respecto a la variedad \mathcal{M}_C siendo compacta⁴ para cuando es igual a 1 y al contrario para el caso no compacto. Por último, cabe mencionar que con esta estructura siempre es posible conseguir un Hamiltoniano que sea hermítico a partir de definir tanto el operador creación aniquilación del sistema, así como las constantes ζ y k , tal y como muestra el siguiente desarrollo

$$\hat{H}_C \hat{H}_C^\dagger = \hat{H}_C^\dagger \hat{H}_C = \hat{\mathbb{I}}_C$$

$$\hat{H}_C \hat{H}_C^\dagger = k^2 \hat{\mathbb{I}}_C + k \zeta \hat{\mathbb{I}}_C \hat{D}_1 - k \zeta \hat{\mathbb{I}}_C \hat{D}_1^\dagger - \zeta^2 \hat{\mathbb{I}}_C$$

³Es decir que no importa si el sistema del que se habla es macroscópico o cuántico.

⁴Una variedad es compacta cuando se trata de una variedad cerrada y acotada, las traslaciones te dejan dentro de la variedad y los valores son finitos.

$$\hat{H}_C \hat{H}_C^\dagger = (k^2 + \zeta^2) \hat{\mathbb{I}}_C. \quad (16)$$

Podemos concluir por lo tanto, que al definir de esta manera el Hamiltoniano del sistema C tenemos la posibilidad de describir múltiples tipos de espacios diferentes a través de una única estructura, reafirmando la generalidad que tenía como objetivo el artículo Foti et al., 2021.

Una vez definido el Hamiltoniano nos centramos en los **Estados Coherentes** del mismo. Recordando los inputs necesarios para obtener estados generalizados, (pág. 14), aun no hemos definido nuestro **Estado de Referencia** o estado base $|G\rangle$. Este será el estado de mínimo peso dentro del sistema, lo que significa que, al aplicarle el operador aniquilación obtendremos.

$$\hat{R}_m |G\rangle = 0. \quad (17)$$

Mientras que por otra parte, si el operador aplicado es el operador diagonal lo que se obtiene es.

$$\hat{D}_i |G\rangle = g_i |G\rangle. \quad (18)$$

Análogamente son exactamente los mismos casos que al aplicar, en el caso del oscilador armónico, ambos operadores sobre el correspondiente estado base del oscilador ($\hat{a}|0\rangle = 0$ y $\hat{N}|0\rangle = 0|0\rangle$) lo cual, en el fondo, tiene sentido ya que originalmente los estados coherentes fueron utilizados para estudiar el oscilador armónico. También resulta interesante estudiar el estado base aplicado sobre el hamiltoniano del sistema.

$$\begin{aligned} \hat{H}_C |G\rangle &= (\zeta \hat{D}_1 + k \hat{\mathbb{I}}_C) |G\rangle \\ \zeta \hat{D}_1 |G\rangle + k \hat{\mathbb{I}}_C |G\rangle &= \zeta g_1 |G\rangle + k |G\rangle = (\zeta g_1 + k) |G\rangle \\ \hat{H}_C |G\rangle &= \epsilon_0 |G\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Esta $\epsilon_0 = (\zeta g_1 + k)$ podría considerarse como el estado energético más bajo del reloj y, si bien podría considerarse como 0 al poder elegir el valor de la constante arbitraria k (tal y como se hizo en el artículo Foti et al., 2021), yo he preferido no darle ningún valor ya que a priori no será algo en lo que se centre este estudio. Por otra parte, si aplicásemos el hamiltoniano a otro estado diferente al básico, resulta evidente pensar que obtendríamos otro autovalor ϵ tal que $\epsilon \propto \zeta d_{1m}$. Al tratarse del autovalor del hamiltoniano, este valor se podría interpretar como la energía de C , por lo que deberá ser siempre real y positivo.

Prosiguiendo, una vez definido nuestro estado base ya podremos generar nuestros CGS que tendrán una forma similar a la vista en (8) quedando de manera similar a:

$$|\Omega\rangle = e^{(\Omega \hat{R}_m^\dagger - \Omega^* \hat{R}_m)} |G\rangle. \quad (20)$$

Donde $m = (1, 2, 3, \dots, M)$ y por lo tanto $\hat{R}_m = (\hat{R}_1, \hat{R}_2, \dots, \hat{R}_M)$. Sin embargo, hay que tener en cuenta una pequeña sutileza, tal y planteamos antes ϵ debe de ser un número real y positivo $\forall m$, de manera que en función del valor que tenga ζ habrá algunos valores de d_{1m} y por tanto de m que no estén permitidos. Teniendo en cuenta este detalle podríamos decir que nuestros estados quedarían restringidos a $\Omega = (0, 0, \dots, \Omega_m, \dots)$ donde $\Omega_m \in \mathbb{C}$ aunque a partir de ahora utilizaremos:

$$\lambda = \Omega_m = \rho e^{-i\varphi}, \quad (21)$$

con $\rho \in [0, \infty)$ y $\varphi \in (-\infty, \infty)$ siendo dos parámetros que tendrán mucha importancia en el futuro. Además, usando las fórmulas BHC cercanas a g_C se puede ver que:

$$|\lambda\rangle = |\Omega_m\rangle = N_\rho e^{\Lambda^* \hat{R}_m} |G\rangle. \quad (22)$$

donde $\Lambda = |\tan(\zeta\rho)|e^{-i\varphi}$ y N_ρ es el factor de normalización (para una mejor comprensión del cambio revisar Foti et al., 2021).

Además a partir de la regla de conmutación de Cartan (12) podemos obtener,

$$[\hat{H}_C, e^{\Lambda^* \hat{R}_m}] = \epsilon \Lambda^* \hat{R}_m e^{\Lambda^* \hat{R}_m}. \quad (23)$$

A partir de la fórmula general de los conmutadores, este resultado nos da una idea aproximada de que la aplicación de la exponencial sobre el hamiltoniano devolverá algo similar a $\epsilon \Lambda^* \hat{R}_m e^{\Lambda^* \hat{R}_m}$, ya que:

$$[\hat{H}_C, e^{\Lambda^* \hat{R}_m}] = \hat{H}_C \cdot e^{\Lambda^* \hat{R}_m} - e^{\Lambda^* \hat{R}_m} \cdot \hat{H}_C.$$

De cumplirse lo anterior, se podría decir que el resultado anterior es muy similar a $\frac{d}{d\varphi} e^{\Lambda^* \hat{R}_m}$, comprobándolo explícitamente vemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} e^{\Lambda^* \hat{R}_m} &= \frac{d}{d\varphi} e^{(|\tan(\zeta\rho)| e^{i\varphi}) \hat{R}_m} = \\ &e^{\Lambda^* \hat{R}_m} \cdot \frac{d}{d\varphi} |\tan \zeta\rho| \hat{R}_m e^{i\varphi} = \\ &i \Lambda^* \hat{R}_m e^{\Lambda^* \hat{R}_m}. \end{aligned} \quad (24)$$

Finalmente comparando ecuaciones se concluye que:

$$\hat{H}_C e^{\Lambda^* \hat{R}_m} = -i\epsilon \frac{d}{d\varphi} e^{\Lambda^* \hat{R}_m}, \quad (25)$$

aunque resulta importante mencionar que, al no conmutar y conociendo $[A, B] = -[B, A]$ si la operación se lleva a cabo de manera inversa la fórmula anterior queda como:

$$e^{\Lambda^* \hat{R}_m} \hat{H}_C = i\epsilon \frac{d}{d\varphi} e^{\Lambda^* \hat{R}_m}. \quad (26)$$

Por último, terminando al completo el análisis del sistema C, aplicaremos el autostado coherente generalizado del reloj sobre el hamiltoniano H_C obteniendo un resultado para nada inesperado:

$$\langle \lambda | \hat{H}_C | \Omega \rangle = i\epsilon \frac{d}{d\varphi} \langle \lambda | \Omega \rangle. \quad (27)$$

Definido prácticamente al completo el sistema de C , ya podemos continuar con el grueso de la demostración. Para ello lo primero que tendremos que realizar es definir el producto interno parcial $\langle \cdot | \cdot \rangle$, que básicamente consiste en la realización del producto interno de dos elementos tales que $\mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\Gamma$. Seguidamente proyectamos (22) sobre (7)

$$\langle \lambda | \hat{H} | \Psi \rangle = 0, \quad (28)$$

donde recordamos que \hat{H} y $|\Psi\rangle$ tienen formas (6) y (9) respectivamente obteniendo entonces:

$$\begin{aligned} \langle \lambda | \hat{H}_C | \Psi \rangle - \langle \lambda | \hat{H}_\Gamma | \Psi \rangle &= 0 \\ i\epsilon \frac{d}{d\varphi} \langle \lambda | \Psi \rangle &= \hat{H}_\Gamma \langle \lambda | \Psi \rangle \\ i\epsilon \frac{d}{d\varphi} |\Phi_\rho(\varphi)\rangle &= \hat{H}_\Gamma |\Phi_\rho(\varphi)\rangle. \end{aligned} \quad (29)$$

donde definimos $|\Phi_\rho(\varphi)\rangle$ como un elemento no normalizado de \mathcal{H}_- , en la que se resalta la dependencia en ρ y φ , además de la importancia de estas variables.

Es fácil ver el parecido entre la ecuación (29) y la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle; i\epsilon \frac{d}{d\varphi} |\Phi_\rho(\varphi)\rangle = \hat{H}_\Gamma |\Phi_\rho(\varphi)\rangle,$$

en la que veríamos como el rol de \hbar sería tomado por ϵ mientras que el del tiempo tendría la siguiente fórmula:

$$t = \frac{\hbar}{\epsilon} \varphi, \quad (30)$$

con la cual explícitamente se consigue:

$$dt = \frac{\hbar}{\epsilon} d\varphi \rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{\epsilon}{\hbar} \frac{d}{d\varphi} \rightarrow \hbar \frac{d}{dt} = \epsilon \frac{d}{d\varphi}.$$

Sin embargo pese al extremo parecido entre ambas ecuaciones aun no puede decirse que se trate de una TDSE (Time Dependent Schrödinger Equation), ya que $|\Phi_\rho(\varphi)\rangle$ es un estado no normalizado, aunque sin embargo albergamos esperanza en estas

ecuaciones ya que $\frac{d}{d\varphi} \langle \Phi_\rho(\varphi) | \Phi_\rho(\varphi) \rangle = 0$, de lo que se concluye que pese a no estar normalizados al menos tienen una forma finita, intuyendo así la posibilidad de obtener una versión normalizada de la misma, aunque antes de ello será necesario estudiar en profundidad ρ y φ .

Además, si volvemos con el operador \hat{R}_m , uno puede definir un “operador de fase” a partir del módulo cuadrado del mismo operador, de tal manera que si:

$$|\hat{R}_m|^2 = \hat{R}_m \hat{R}_m^\dagger.$$

el operador podría ser redefinido tal que:

$$\hat{R}_m = \hat{r}_m e^{-i\hat{\phi}}. \quad (31)$$

Este operador de fase podría ponerse tanto en forma exponencial como de senos y cosenos. Además cabe mencionar que, esta no sería la primera vez que aparece un término de fase en este trabajo, tal y como se puede ver en la ecuación (21), lo que nos hace sospechar de la posible relación entre operador y parámetro. El caso es que de la misma manera que con (23) el conmutador de \hat{H}_C parece actúa de nuevo de la misma manera que con el conmutador anteriormente mencionado quedando:

$$[\hat{H}_C, \sin \hat{\phi}] = i\epsilon \frac{d}{d\hat{\phi}} \sin \hat{\phi} = i\epsilon \cos \hat{\phi}, \quad (32)$$

por lo que se podría concluir consecuentemente que:

$$\Delta \hat{H}_C \Delta \sin \hat{\phi} \geq \left| \frac{\epsilon}{2} \langle \cos \hat{\phi} \rangle \right|. \quad (33)$$

Resumiendo hasta este momento del trabajo hemos obtenido y definido las múltiples variables necesarias para entender el sistema C así como comprobar la interacción de sus autoestados tanto con el hamiltoniano del propio reloj, como con el del sistema completo, consiguiendo obtener varios hilos de los cuales seguiremos

tirando en los siguientes apartados.

Por una parte, en primer lugar, parece haber una clara relación entre el hamiltoniano del reloj y la energía del sistema Γ relacionadas a partir de la ec. (29). Otros dos elementos que parecen estar claramente relacionados son $\hat{\phi}$ y φ a través de las ecuaciones (21,23,31,32).

En segundo lugar, al poder estar relacionadas tanto \hat{H}_C con la energía, como $\hat{\phi}$ con φ y por tanto con el tiempo ec. (30), veremos que es obtener a partir de la ecuación (33), el principio de incertidumbre energía tiempo.

En tercer lugar, recordando que m es un subíndice arbitrario, pero que debe de garantizar tanto que ϵ como $\chi(\Omega_m) \neq 0$, podemos decir que existe una cierta combinación lineal hermítica de operadores escalera $\hat{R}_m \hat{R}_m^\dagger$ que son accesibles por C y cuyas medidas nos dan información de φ y por lo tanto del tiempo.

Por último, en relación de nuevo con el tiempo, hemos obtenido una fórmula de lo que a todas luces se debe de comportar como el tiempo en nuestro sistema global. No obstante, al tratarse de un sistema completamente cuántico, de momento, solamente podría considerarse como una fórmula para el tiempo cuántico.

$$t_{QM} = \frac{\hbar}{\epsilon} \varphi. \quad (34)$$

2.5. Reloj Clásico para un Sistema Cuántico

El siguiente paso entonces, ya que hemos conseguido una fórmula del tiempo cuántico a partir de aplicar los estados del reloj sobre diferentes operadores, será aplicar el límite clásico que tantas veces se ha mencionado a lo largo del trabajo. Es decir, que se asumirá que el reloj cumple con las características necesarias para comportarse como un cuerpo macroscópico, cosa que no debería de ser un problema ya que hemos definido los estados del mismo como coherentes.

El aplicar el límite tiene una consecuencia principal, el paso de valores discretos a continuos. De esta manera el producto interno entre dos estados se transformaría de la siguiente manera:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\langle \Omega | \Omega' \rangle) \rightarrow \delta(\Omega - \Omega'). \quad (35)$$

Así, los estados cuánticos pasarán a identificarse como puntos dentro de la variedad clásica de espacio-fase \mathcal{M}_C del reloj. Por otra parte, en cuanto a los observables, solamente se mantendrían con sentido físico aquellos cuyos valores convergiesen en lugar de volverse infinitos, es decir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\langle \Omega | \hat{A} | \Omega' \rangle}{\langle \Omega | \Omega' \rangle} \right) < \infty. \quad (36)$$

Recordamos también que, intentando encontrar la TDSE convenimos que al no estar normalizado $|\Phi_\rho(\varphi)\rangle$ no se podría establecer (29) como la ecuación de Schrödinger, por ello pasaremos a buscar una manera de encontrar esta normalización. Para ello, tal y como hacen en el paper, es necesario darse cuenta que $\langle \Phi_\rho(\varphi) | \Phi_\rho(\varphi) \rangle \rightarrow \chi^2(\lambda)$ cuando se tiende al límite clásico del reloj.

$$\begin{aligned} |\Phi_\rho(\varphi)\rangle &= \int d\mu \chi(\Omega) \langle \lambda | \Omega \rangle |\phi(\Omega)\rangle \\ \langle \Phi_\rho(\varphi) | \Phi_\rho(\varphi) \rangle &= \int d\mu^2 \chi^2 \langle \Omega | \lambda \rangle \langle \lambda | \Omega \rangle \langle \phi(\Omega) | \phi(\Omega) \rangle \\ \langle \Phi_\rho(\varphi) | \Phi_\rho(\varphi) \rangle &= \int d\mu^2 \chi^2 \langle \Omega | \hat{\mathbb{I}} | \Omega \rangle \\ \langle \Phi_\rho(\varphi) | \Phi_\rho(\varphi) \rangle &= \int d\mu^2 \chi^2 \end{aligned}$$

Tal y como se describe en la pág.(15) $\chi^2(\rho)$ se trata de una distribución de probabilidad normalizada, por ello conseguimos la normalización del estado de la siguiente manera:

$$|\phi_\rho(\varphi)\rangle = \frac{|\Phi_\rho(\varphi)\rangle}{\sqrt{\chi^2(\rho)}}. \quad (37)$$

Por lo tanto, la ec. (29), tras dividir a ambos lados de la ecuación obteniendo:

$$i\epsilon |\phi_\rho(\varphi)\rangle = \hat{H}_\Gamma |\phi_\rho(\varphi)\rangle, \quad (38)$$

obteniendo, ahora si la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, donde este sigue describiéndose como $t = \hbar \frac{\varphi}{\epsilon}$ y la dependencia con respecto a ρ de los estados ϕ_ρ sigue estando manifiesta en la notación.

Seguidamente, repitiendo los desarrollos para el caso macroscópico y además teniendo en cuenta el estado normalizado, volveremos a proyectar el GCS de C sobre los diferentes observables del propio sistema que son, el hamiltoniano \hat{H}_C y el operador de fase definido como $\sin \hat{\phi}$. En primer lugar proyectaremos sobre (7), obteniendo:

$$\begin{aligned} \langle \lambda | \hat{H} | \Psi \rangle &= \int_{\mathcal{M}} d_\mu(\Omega) \chi(\Omega) \langle \lambda | (\hat{H}_C - \hat{H}_\Gamma) | \Omega \rangle | \phi(\Omega) \rangle \\ &= \int_{\mathcal{M}} d_\mu(\Omega) \chi(\Omega) (\langle \lambda | \hat{H}_C | \Omega \rangle - \hat{H}_\Gamma \langle \lambda | \Omega \rangle) | \phi(\Omega) \rangle \\ &= \int_{\mathcal{M}} d_\mu(\Omega) \chi(\Omega) \langle \lambda | \Omega \rangle \left(\frac{\langle \lambda | \hat{H}_C | \Omega \rangle}{\langle \lambda | \Omega \rangle} - \hat{H}_\Gamma \right) | \phi(\Omega) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

De manera que si tenemos en cuenta las ecuaciones (35, 36) para cualquier ρ tal que $\chi(\rho) \neq 0$ sabemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle \lambda | \hat{H}_C | \Omega \rangle}{\langle \lambda | \Omega \rangle} &< \infty \\ \langle \lambda | \hat{H}_C | \Omega \rangle \delta(\lambda - \Omega) &< \infty \\ \langle \lambda | \hat{H}_C | \lambda \rangle &< \infty. \end{aligned} \quad (40)$$

De esta ecuación, obtenemos la confirmación de que los autovalores del hamiltoniano del reloj son números finitos o convergentes, reforzando la teoría de que, a través de ellos se podría conocer la energía del sistema Γ .

Siguiendo a partir de la ecuación (39) y recordando la forma de $|\Phi_\rho\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{M}} d_\mu(\Omega) \chi(\Omega) \langle \lambda | \Omega \rangle |\phi(\Omega)\rangle (\langle \lambda | \hat{H}_C | \lambda \rangle - \hat{H}_\Gamma) = 0 \\
&= |\Phi_\rho(\varphi)\rangle (\langle \lambda | \hat{H}_C | \lambda \rangle - \hat{H}_\Gamma) = 0 \\
&\hat{H}_\Gamma |\phi_\rho(\varphi)\rangle = \langle \lambda | \hat{H}_C | \lambda \rangle |\phi_\rho(\varphi)\rangle.
\end{aligned} \tag{41}$$

Quedando definitivamente demostrado que

$$\hat{H}_\Gamma |\phi_\rho(\varphi)\rangle = E_\Gamma(\rho) |\phi_\rho(\varphi)\rangle, \tag{42}$$

y que por lo tanto:

$$E_\Gamma(\rho) = \langle \lambda | \hat{H}_C | \lambda \rangle. \tag{43}$$

Esta expresión se puede calcular de forma explícita, aunque los diferentes pasos son altamente no triviales. Para realizarlos es necesario partir de $|\lambda\rangle = e^{\hat{W}} |G\rangle$, donde $\hat{W} = \Omega_m \hat{R}_m^\dagger - \Omega_m^* \hat{R}_m$, mientras que las constantes utilizadas anteriormente como ζ , k o ϵ ya las conocemos. Además de todo esto, nos valdremos de lo que se conoce como la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff, la cual, nos da una especie de descomposición en serie de conmutadores tal y como se aprecia en la siguiente fórmula.

$$e^{\hat{X}} \hat{Y} e^{-\hat{X}} = Y + [\hat{X}, \hat{Y}] + \frac{1}{2!} [\hat{X}, [\hat{X}, \hat{Y}]] + \frac{1}{3!} [\hat{X}, [\hat{X}, [\hat{X}, \hat{Y}]]] + \dots \tag{44}$$

En nuestro caso partimos de:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda | \hat{H}_C | \lambda \rangle &= k + \langle \lambda | \zeta \hat{D}_1 | \lambda \rangle = k + \zeta \langle G | e^{-\hat{W}} \hat{D}_1 e^{\hat{W}} | G \rangle \\
&= k + \zeta \langle G | (\hat{D}_1 + [\hat{W}, \hat{D}_1] + \frac{1}{2!} [\hat{W}, [\hat{W}, \hat{D}_1]] + \frac{1}{3!} [\hat{W}, [\hat{W}, [\hat{W}, \hat{D}_1]]] + \dots) | G \rangle \\
&= \zeta \sum_i g_i \left[\frac{1}{2!} (-2\rho^2 d_{1m} d_{im}) + \frac{1}{4!} \sum_\theta (-2\rho^2 d_{1m} d_{im}) (-2d_{\theta m} d_{im}) + \dots \right]
\end{aligned}$$

$$\hat{H}_C(\rho) = \epsilon a^{-2} \zeta^2 b^2 (\cos a \sqrt{2\rho} - 1), \quad (45)$$

donde para obtener este resultado definimos $a^2 = \sum_{\theta} d_{\theta} m$ y $\zeta^2 b^2 = \sum_i g_i d_i m$. Posteriormente, además se escoge que $\zeta^2 a^2 = 2$, lo que provoca que, tanto los operadores diagonal y creación/destrucción queden multiplicadas por un factor $\frac{\sqrt{2\zeta^2}}{a}$, de la misma manera que sus autovalores, obteniendo como resultado.

$$H_C(\rho) = \langle \lambda | \hat{H}_C | \lambda \rangle = \frac{\epsilon b^2}{2} \cos(2\zeta\rho) - 1. \quad (46)$$

En esta última ecuación podemos observar un hecho muy interesante, $\hat{H}_C(\rho)$ no depende de φ de ninguna manera. De hecho esta depende únicamente de la variable ρ , tal y como predecía la notación que estábamos utilizando y que ahora se ve reafirmada, pudiendo decir sin miedo a equivocarnos que el hamiltoniano del reloj nos sirve para obtener $E_{\Gamma}(\rho)$, mientras que, por otra parte descubrimos el papel de ρ como el parámetro del que depende la energía del sistema.

Por último, partiendo de nuevo de los GCS $|\lambda\rangle$ del reloj y aplicándolos sobre el operador de fase, obteniendo de nuevo todo un desarrollo con la fórmula BHC del cual finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle \lambda | \sin \hat{\phi} | \lambda \rangle &\rightarrow \sin \varphi \\ \langle \lambda | \cos \hat{\phi} | \lambda \rangle &\rightarrow \cos \varphi. \end{aligned} \quad (47)$$

De esta manera, comparando con ec. (33) y tomando $E_{\Gamma}(\rho) = \hat{H}_C(\rho)$ junto con la aproximación para $\varphi \ll 1$ tal que $\sin \varphi \approx \varphi$ obtenemos:

$$\Delta E_{\Gamma}(\rho) \Delta \varphi \geq \frac{\epsilon}{2}. \quad (48)$$

Por lo tanto, de nuevo, si tenemos en cuenta la definición (34) queda indudablemente definido tanto el principio de incertidumbre energía-tiempo, como el tiempo para la mecánica cuántica.

A través de todas estas demostraciones, es posible ver que la obtención de esta definición del tiempo es consecuencia de definir nuestro sistema como un sistema entrelazado de reloj y sistema cuántico, dejando implícito que este es consecuencia del mismo entrelazamiento entre ambos sistemas. Por el contrario, pese a poder argumentar que como el reloj es macroscópico, y por ende clásico, el tiempo medido por el mismo debería de serlo también, al tratar el sistema Γ de manera puramente cuántica no sería justificable que esta fórmula del tiempo pudiera ser utilizada sobre un sistema clásico. Por tanto, para dar el trabajo por terminado deberemos de obtener los estados coherentes de Γ , a partir de los cuales, tras aplicar de nuevo el límite clásico ahora para todo el sistema, obtendremos las ecuaciones del movimiento de Hamilton con una pequeña variación, donde debería de estar el tiempo aparecerá nuestra variable $\frac{\hbar}{\epsilon}\varphi$.

2.6. Reloj y Sistema Clásicos

Como hemos mencionado en el párrafo previo, si queremos que nuestro sistema pueda describirse de manera similar pero sobreviviendo al límite para $N \gg$, debemos recurrir a los GCS pertenecientes al sistema en evolución, es decir, estados que pertenecerán a un álgebra de lie g_Γ en lugar de g_C . Estos estados serán llamados como $\{|\gamma\rangle\}$ donde $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_j)$ donde $\gamma \in \mathbb{C}^{\forall j}$ y donde además J estará relacionado con la dimensión del álgebra. Al tratarse de estados coherentes, cada $|\gamma\rangle$ se corresponde o identifica con un punto de la variedad \mathcal{M}_Γ cuya dimensión será de $2J$.

Partiendo de la identidad del sistema Γ , $\hat{\mathbb{I}}_\Gamma = \int d\mu(\gamma) |\gamma\rangle \langle\gamma|$ y aplicándola sobre el estado completo del sistema (9) obtenemos:

$$|\Psi\rangle\rangle = \hat{\mathbb{I}}_\Gamma \int_{\mathcal{M}_C} d\mu(\hat{\Omega}) \chi(\Omega) |\Omega\rangle |\phi(\Omega)\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{M}_\Gamma} d\mu(\gamma) |\gamma\rangle \langle\gamma| \int_{\mathcal{M}_C} d\mu(\hat{\Omega}) \chi(\Omega) |\Omega\rangle |\phi(\Omega)\rangle \\
&= \int_{\mathcal{M}_\Gamma} d\mu(\gamma) \int_{\mathcal{M}_\Gamma} d\mu(\hat{\Omega}) \chi(\Omega) |\Omega\rangle |\gamma\rangle \langle\gamma| \phi(\Omega)\rangle \\
|\Psi\rangle\rangle &= \int_{\mathcal{M}_\Gamma} d\mu(\gamma) \int_{\mathcal{M}_\Gamma} d\mu(\hat{\Omega}) \beta(\Omega, \gamma) |\Omega\rangle |\gamma\rangle, \tag{49}
\end{aligned}$$

donde $\beta(\Omega, \gamma) = \chi(\Omega) |\phi(\Omega)\rangle$, es una función en $\mathcal{M}_C \times \mathcal{M}_\Gamma$ cuyo módulo al cuadrado será la probabilidad de encontrar a Γ en el estado $|\gamma\rangle$ con C encontrándose en el estado $|\Omega\rangle$. Dado que el sistema global se encuentra en un estado puro de $|\Psi\rangle\rangle$, la función $\beta(\Omega, \gamma)$ será diferente de cero si y solo si el conjunto $(\Omega, \gamma) \in \mathcal{M}_C \times \mathcal{M}_\Gamma$, que definen los estados $|\Omega\rangle \otimes |\gamma\rangle \in \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_\Gamma$, se encuentran presentes en la descomposición de GCS que cumplan la ecuación (49).

De nuevo, seguidamente, aplicaremos sobre el hamiltoniano total del sistema tanto el estado general de la ec. (49), como el estado coherente específico $|\bar{\Omega}, \bar{\gamma}\rangle = |\bar{\Omega}\rangle \otimes |\bar{\gamma}\rangle$ obteniendo:

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\Omega}, \bar{\gamma}| \hat{H} |\Psi\rangle\rangle &= 0 = \int_{\mathcal{M}_\Gamma} d\mu(\gamma) \int_{\mathcal{M}_\Gamma} d\mu(\hat{\Omega}) \beta(\Omega, \gamma) \langle\bar{\Omega}, \bar{\gamma}| \hat{H} |\Omega, \gamma\rangle \\
&= \int_{\mathcal{M}_\Gamma} d\mu(\gamma) \int_{\mathcal{M}_\Gamma} d\mu(\hat{\Omega}) \beta(\Omega, \gamma) \langle\bar{\Omega}, \bar{\gamma}| (\hat{H}_C \otimes \hat{\mathbb{I}}_\Gamma - \hat{H}_\Gamma \otimes \hat{\mathbb{I}}_C) |\Omega, \gamma\rangle \\
&= \int_{\mathcal{M}_\Gamma} d\mu(\gamma) \int_{\mathcal{M}_\Gamma} d\mu(\hat{\Omega}) \beta(\Omega, \gamma) (\langle\bar{\Omega}| \hat{H}_C |\Omega\rangle \cdot \langle\bar{\gamma}| \gamma\rangle - \langle\bar{\gamma}| \hat{H}_\Gamma |\gamma\rangle \cdot \langle\bar{\Omega}| \Omega\rangle) \\
&= \int_{\mathcal{M}_\Gamma} d\mu(\gamma) \int_{\mathcal{M}_\Gamma} d\mu(\hat{\Omega}) \beta(\Omega, \gamma) \langle\bar{\gamma}| \gamma\rangle \langle\bar{\Omega}| \Omega\rangle \left(\frac{\langle\bar{\Omega}| \hat{H}_C |\Omega\rangle}{\langle\bar{\Omega}| \Omega\rangle} - \frac{\langle\bar{\gamma}| \hat{H}_\Gamma |\gamma\rangle}{\langle\bar{\gamma}| \gamma\rangle} \right). \tag{50}
\end{aligned}$$

Si a la fórmula anterior le aplicamos el límite $N \rightarrow \infty$ lo que obtenemos no solo es que ambos hamiltonianos sean números no infinitos, sino que además, debido a que la fórmula está igualada a cero:

$$\hat{H}_C(\Omega) = \hat{H}_\Gamma(\gamma). \tag{51}$$

Esto nos da una información muy valiosa, pues ambos sistemas, al comportarse como sistemas clásicos, se regirían según un mismo Hamiltoniano. Particularmente, si consideramos aquel par (Ω, γ) que hacen que $\beta(\Omega, \gamma) \neq 0$, donde como ya sabemos $\Omega = (0, 0, \dots, \Omega_m, \dots, 0, 0, 0)$, corresponden a los autoestados del reloj $|\lambda\rangle$, se podría decir que, conocidas las relaciones obtenidas a partir de las ecuaciones (42,46,45), este par pertenece a una subvariedad $(\mathcal{U}_C \subset \mathcal{M}_C \times \mathcal{U}_\Gamma \subset \mathcal{M}_\Gamma)$, el cual contaría un mapa $F : \mathcal{U}_C \rightarrow \mathcal{U}_\Gamma$ que se define como:

$$\lambda \in \mathcal{U}_C \xrightarrow{F} u \in \mathcal{U}_\Gamma : \hat{H}_\Gamma(u = F(\lambda)) = \hat{H}_C(\rho). \quad (52)$$

Con ello despejamos otra duda, comprendiendo ahora mejor la razón o más bien la forma en la que la energía del sistema viene dada por el hamiltoniano del reloj. Según se observa en el desarrollo anterior podemos ver que a través del mapa F que se relacionan λ y por lo tanto C, con u y de esa forma con Γ . En nuestro caso, ya que la forma de F es arbitrario, consideraremos que la variedad \mathcal{M}_Γ tendrá una estructura simpléctica⁵ y que por lo tanto cuenta con un *Darboux Chart*⁶

$$\{D : \gamma \in \mathcal{M}_\Gamma \rightarrow (q, p) = ((q_1, p_1), (q_2, p_2), (q_3, p_3), \dots, (q_J, p_J)) \in \mathbb{R}^{2J}, \quad (53)$$

tal que $\{q_i, p_k\}_\Gamma = h^{-1}\delta_{ij}$ donde h será igual a una constante, y donde a partir de ahora $\{\cdot, \cdot\}_\Gamma$ se conocerán como los brakets de Poisson en \mathcal{M}_Γ .

Esto nos relaciona la parametrización a partir de los estados GCS via vectores complejos $\{\gamma\}$ y $\{\lambda\}$ con pares de parametros reales (q_j, p_j) . De todas las posibles combinaciones posibles de acuerdo con la referencia Zhang et al., 1990 en el artículo escogieron la siguiente (es posible elegir otras parametrizaciones siempre y cuando la condición (53) se cumpla, de manera que el resultado no vambiará demasiado)

⁵Variedad cerrada y no degenerada.

⁶sistema de coordenadas locales de una variedad simpléctica.

$$q_j - i\zeta^2 p_j = v_j \sqrt{2b}\zeta \sin(\zeta\rho) e^{-i\varphi}, \quad (54)$$

con $v \in \mathbb{R}^J$ un vector unitario constante tal que $\sum_j v_j^2 = 1$. Reescribiendo la fórmula anterior, descomponiendo la exponencial según la identidad de Euler:

$$q_j - i\zeta^2 p_j = v_j \sqrt{2b}\zeta \sin(\zeta\rho) (\cos(\varphi) - i \sin(\varphi))$$

$$q_j - i\zeta^2 p_j = (\cos(\varphi) v_j \sqrt{2b}\zeta \sin(\zeta\rho) - i \sin(\varphi) v_j \sqrt{2b}\zeta \sin(\zeta\rho)).$$

Comparando términos finalmente concluimos que:

$$q_j = v_j \sqrt{2b}\zeta \sin(\zeta\rho) \cos(\varphi) \quad (55)$$

$$p_j = \frac{v_j \sqrt{2b}}{\zeta} \sin(\zeta\rho) \cos(\varphi), \quad (56)$$

A partir de estos parámetros, ya podemos calcular los brakets de Poisson estandar sobre \mathcal{M}_C

$$\{f_C, g_C\}_C = \frac{1}{hb^2\zeta \sin(2\zeta\rho)} \left(\frac{\partial f_C}{\partial \rho} \frac{\partial g_C}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_C}{\partial \rho} \frac{\partial f_C}{\partial \varphi} \right). \quad (57)$$

Esto se cumple $\forall f_C, g_C$ pertenecientes a la variedad del C donde ambas por cierto, son funciones genéricas de la variedad. Sin embargo, sabiendo que si las funciones elegidas para generar los brakets de Poisson son $\{q_j, H_C\}_C$ y $\{p_j, H_C\}_C$ se obtiene:

$$\{q_j, H_C\} = \frac{\epsilon}{h} \frac{dq_j}{d\varphi} \quad (58)$$

$$\{p_j, H_C\} = \frac{\epsilon}{h} \frac{dp_j}{d\varphi}, \quad (59)$$

y sabiendo que tanto p_j como q_j tendrán la misma forma tanto para el reloj como para el sistema estudiado, al igual que pasa con los hamiltonianos de ambos ec.(51), podemos concluir que $\{.,.\}_\Gamma = \{.,.\}_C$ consiguiendo entonces:

$$\{q_j, H_\Gamma\} = \frac{\epsilon}{h} \frac{dq_j}{d\varphi} \quad (60)$$

$$\{p_j, H_\Gamma\} = \frac{\epsilon}{h} \frac{dp_j}{d\varphi} \quad (61)$$

Además, recordando las propiedades de los brakets de Poisson, sabremos que los brakets del hamiltoniano y las coordenadas locales nos dan como resultado las ecuaciones del movimiento de Hamilton en las que, si observamos los parámetros que toman la función del tiempo en ellas se obtiene de nuevo:

$$t_{Cl} = \frac{h}{\epsilon} \varphi \quad (62)$$

Donde si recordamos la definición (53), h es una constante arbitraria, la cual, si comparamos con (34) es fácil concluir que será $h = \hbar$ con lo cual finalmente se demuestra que:

$$t_{QM} = t_{CL} = \frac{\hbar}{\epsilon} \varphi \quad (63)$$

3. Conclusión

Así, durante la realización de este trabajo, hemos conseguido llegar a comprobar de primera mano la premisa del artículo de Foti et al., 2021, de manera que nos es posible llevar a cabo múltiples conclusiones. En este apartado, también mencionaré algunas limitaciones que ha tenido este estudio, así como las posibles líneas de investigación que quedarían abiertas en orden de mejorar la completitud del mismo, mientras que por último se realizará una reflexión sobre el aprendizaje personal que he adquirido a lo largo de la realización de este trabajo de fin de grado.

3.1. Conclusiones e Implicaciones Teóricas

Comenzando con este apartado, resumiremos las implicaciones teóricas del **Mecanismo de Page y Wootters**. Este no solo ha demostrado ser útil en cuanto a explorar el comportamiento del tiempo en la mecánica cuántica, sino que, a través del mismo, nos ha sido posible respaldar la idea de que *no existe tal cosa como “tiempo clásico” o “tiempo cuántico” diferentes entre si*, solamente existe un único tiempo, *y es consecuencia del entrelazamiento*. Lo cual tiene grandes implicaciones teóricas, tales como que el flujo de tiempo que vivimos en el día a día, se explicaría a partir de una característica eminentemente cuántica, el entrelazamiento. Por lo tanto, al relacionar claramente la física cuántica con elementos macroscópicos, este enfoque podría verse como una vía de “unificación” con las teorías relativistas, además de enriquecer la física en tanto en cuando se proporciona una visión en la que el tiempo no es en ningún caso una variable externa, sino que es consecuencia de un fenómeno físico.

Además del mecanismo de Page y Wootters otro elemento diferenciador y vital a lo largo de la demostración, han sido los **Estados Coherentes Generalizados** o **GCS**. Gracias a ellos nos ha sido posible obtener un parámetro con el cual definir una fórmula para el tiempo (63) a partir de la ecuación de Schrödinger (38), así como, ser esenciales para la verificación de la transición del tiempo cuántico al tiempo clásico al considerar las condiciones que hacen del reloj un sistema macroscópico. Es decir, al hacer tender $N \rightarrow \infty$ el reloj pasa a comportarse como un sistema clásico, y es gracias a los GCS que nos es posible mantenernos en el marco teórico del mecanismo de PaW.

Con ellos, también conseguimos obtener un **principio de incertidumbre Energía-Tiempo** así como, **las ecuaciones del movimiento de Hamilton** al aplicar el límite clásico. El hecho de que sea posible obtener los corchetes de Poisson (57), y por tanto, obtener las ecuaciones del movimiento partiendo de un sistema com-

pletamente cuántico favorece la idea de que quizá estemos ante una muy buena aproximación a la unificación Clásico-cuántica.

3.2. Criticismo y Lineas de Investigación

Si bien es cierto que este marco resulta muy prometedor, es importante señalar las limitaciones presentes tanto en artículo, como sobretodo en el trabajo. Por una parte, el modelo asume dos sistemas aislados los cuales no interaccionan entre sí más allá de estar entrelazados, y aunque si bien, no son características inasumibles para múltiples sistemas físicos, es cierto que se está perdiendo generalidad de esta manera.

Mientras tanto, por otra parte, hubiera sido interesante indagar y profundizar más acerca del operador de fase. De el mismo, si bien queda clara tanto su utilidad en el desarrollo de la expresión del principio de incertidumbre Energía-Tiempo, así como su relación con la variable φ , no queda tan clara su procedencia, a diferencia de la mayoría de variables explicadas durante los desarrollos.

En cuanto a nuevas líneas de investigación y formas de ampliar el trabajo realizado serían, por ejemplo, la aplicación del mecanismo en algún sistema cuántico, como por ejemplo el oscilador armónico (Coppo et al., 2024) o incluso intentar considerar efectos gravitatorios intentando estudiar como compaginar esta nueva interpretación con el tiempo relativista.

3.3. Reflexión Final

Por último me gustaría concluir este trabajo diciendo que, a nivel personal la realización del mismo ha superado con creces mis expectativas en relación con el nivel de aprendizaje conseguido a lo largo del mismo.

Con este, he logrado tanto consolidar como aumentar con creces los conocimientos que ya poseía sobre la mecánica cuántica, así como profundizar en ámbitos avanzados de la física teórica tales como la naturaleza del tiempo en la física cuántica y su conexión con la clásica. Además también es importante destacar el aprendizaje llevado a cabo sobre diferentes herramientas matemáticas tales como los álgebras de Lie, la construcción de bases de Cartan o la utilización y construcción de GCS. En definitiva, considero que, a nivel personal, he conseguido todos los objetivos que me propuse en un inicio para la realización de este trabajo de investigación que espero sea el primero de muchos.

Referencias

- Foti, C., Coppo, A., Barni, G., et al. (2021). Time and classical equations of motion from quantum entanglement via the Page and Wootters mechanism with generalized coherent states. *Nature Communications*, 12(1787). <https://doi.org/10.1038/s41467-021-21782-4>
- Taylor, J. R. (2005). *Classical Mechanics*. University Science Books. <https://archive.org/details/classical-mechanics-john-taylor/page/9/mode/2up?view=theater>
- Giovannetti, V., Lloyd, S., & Maccone, L. (2015). Quantum time. *Physical Review D*, 92(4). <https://doi.org/10.1103/physrevd.92.045033>
- Zhang, W.-M., Feng, D. H., & Gilmore, R. (1990). Coherent states: Theory and some applications. *Rev. Mod. Phys.*, 62, 867-927. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.62.867>
- Coppo, A., Cuccoli, A., & Verrucchi, P. (2024). Magnetic clock for a harmonic oscillator. *Physical Review A*, 109(5). <https://doi.org/10.1103/physreva.109.052212>